УДК 534

АНАЛИЗ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВИБРОУДАРНЫХ РЕЖИМОВ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В.Л. Крупенин

Учреждение Российской академии наук Институт машиноведения РАН, Россия, Москва

В работе приведены модели несимметричных виброударных систем с двойными ограничителями при детерминированном и стохастическом возбуждении колебаний. Даются расчетные схемы.

Ключевые слова: виброударные системы, симметричные и несимметричные системы, детерминированное возбуждение, стохастическое возбуждение, частотно-временной анализ, диффузионные Марковские процессы, уравнение ФПК.

1. Традиционная теория виброударных систем [1 - 3], изучающая динамические эффекты, возникающие в механических системах, как правило, в качестве базовых моделей рассматривает несимметричные системы с одним ограничителем либо симметричные системы с двусторонними ограничителями. Однако в точности симметричных систем не существует, так как гарантированно выставить, например, ударник на одинаковые расстояния между двумя ограничителями хода практически невозможно.

Модели континуальных и дискретных виброударных систем, как правило, рассматривают либо односторонние препятствия движению тел, либо препятствия, расположенные с двух сторон, но на равных расстояниях от движущегося тела (симметричные системы).

Рассмотрим линейную склерономную стационарную механическую систему с произвольным числом степеней свободы (рис.1).

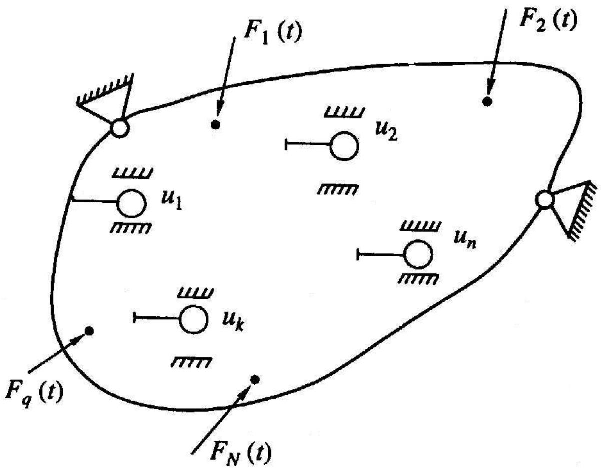

Рис. 1.

Ограничимся, вообще говоря, несущественным предположением, что каждая точка рассматриваемой системы совершает одномерные движения вдоль некоторой оси. Будем также предполагать, что данная система оснащена конечным числом (N) двусторонних несимметричных ударных пар, каждая из которых реализует прямой центральный удар точечного ударника с двумя ограничителями хода [1-3]. В данных условиях легко получить операторные уравнения движения. Предположим, что, либо в результате анализа дифференциальных уравнений движения, либо проведенного натурного моделирования, семейство операторов динамической податливости рассматриваемой системы $\{L(u, w, p)\}$, $p \equiv \partial/\partial t$ известно [2, 3], где u и w – произвольно выбранные точки системы. Всякий оператор $L(u, w, p)$ ставит в соответствие силе (распределению сил), приложенной в точке w, перемещение $u(t)$ или, в случае континуальных моделей, поле перемещений $u(t, x)$, где – x текущая координата [2, 3].

Пусть в точках u_k $(k=1,..N)$ для локальных операторов динамической податливости имеют место асимптотические оценки: $L(u_k, u_k, p)=O(p^{-2})$ при $p \longrightarrow \infty$, что означает, в частности, что в точках u_k сосредоточены некоторые массивные точечные тела [2, 3]; пусть их массы равны m_k и пусть эти тела и являются упомянутыми выше ударниками, взаимодействующими с двойными несимметричными ограничителями. Предполагая удар мгновенным, прямым и центральным, моделируемым при помощи гипотезы Ньютона, можем записать, во-первых, очевидные геометрические ограничения вида: $-\Delta_k^{(2)} \leq u_k \leq \Delta_k^{(1)}$ и при выходе на связь $u_k = \pm \Delta_k^{(2,1)}$:

$$u_{kt}(t^{(1)}_{jk}+0)=-R_k^{(1)}u_{kt}(t^{(1)}_{jk}-0);\ u_{kt}(t^{(2)}_{jk}+0)=-R_k^{(2)}u_{kt}(t^{(2)}_{jk}-0). \qquad (1)$$

Здесь $t^{(1)}_{jk}$ и $t^{(2)}_{jk}$ - некоторый j-й момент удара в k-й правой (верхней) (1) или левой (нижней) - (2) ударной паре; $R_k^{(1),(2)}$- значения соответствующих коэффициентов восстановления.

Предположим далее, что в Q выделенных точках u_q системы (q=1,2,....Q) приложены Т-периодические возбуждающие силовые факторы $F_q(t)$, характер действия которых согласуется с характером возможного одномерного движения каждой точки их приложения. Используя семейство операторов динамической податливости легко записать операторные уравнения движения. В частности, для соударяющихся точек u_k и любой произвольной точки u_q можно получить, обозначая $\Phi_j(u_j, u_{jt})$ - силу удара [2, 3] в произвольной j-й ударной паре (j=1,...,N):

$$u_k(t)=\sum_{q=1}^{Q} L(u_q, u_k, p)F_q(t) - \sum_{j=1}^{N} L(u_j, u_k, p)\Phi_j(u_j, u_{jt}). \qquad (2)$$

Пусть структура движения такова, что период виброударного процесса $T=2\pi/\omega$ совпадает с периодом возбуждающего воздействия и сопровождается поочередными ударами об ограничители (1) и (2). Тогда, используя, например, данные выше соотношения, а также соотношения, данные в [2, 3] записываем:

$$\Phi_j(u_j, u_{jt})= - J_{1j}\delta^T(t-\varphi_{1j}) + J_{2j}\delta^T(t-\varphi_{2j}), \qquad (3)$$

где $\varphi_{1,2,j}$ - фазовые сдвиги, однозначно связанные с моментами соударений в j-х арах ($2n$ неизвестных параметра движения). Условия удара (1) определяют соотношения для еще двух неизвестных параметров движения - импульсов ударов в каждой из n двойных ударных пар:

$$J_{1j} = m_j\,(1+ R_j^{(1)})\; u_{jt}(\varphi_{1j}\,\text{-}0)\geq 0;\; J_{2j} = m_j\,(1+ R_j^{(2)})\; u_{jt}(\varphi_{1j}\,\text{-}0)\geq 0. \qquad (4)$$

Условия (4) называют условиями совместности [2, 3]. Входящие в формулу (3) символы $\delta^T(t)$ обозначают T – периодические обобщенные функции (периодические последовательности δ - функций), для которых существуют две эквивалентные записи [2, 3] :

$$\delta^T(t)= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)= T^{-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}exp(iq\omega t). \qquad (5)$$

Рассмотрим уравнение (2) и и обозначим элементарно вычисляемое выражение

$$\sum_{q=1}^{Q} L\,(u_q,\, u_k,\, p\,)F_q(t)= U_k(t). \qquad (6)$$

Эта функция определяет решение линейной задачи в пренебрежении ударами. Теперь, используя алгоритмы частотно – временных методов анализа виброударных процессов мы можем получить аналог известного *2N*- параметрического представления [4], которое становится *4N* – параметрическим:

$$u_k(t)= U_k(t)+ \sum_{j=1}^{N}[-\,J_{1j}\;\chi\,(\,u_j,\,u_k,t\text{-}\,\varphi_{1j}) + J_{2j}\;\chi\,(\,u_j,\,u_k,t\text{-}\,\varphi_{2j})]. \qquad (7)$$

Здесь введены периодические функции Грина (ПФГ) линейных задач, определяемые рядами Фурье вида:

$$\chi\,(\,u_j,\,u_k,t)= {}^{1}\!/_{T}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\; L(u_j,\,u_k,\,iq\omega)$$

Предполагается, что фильтрующие свойства линейных систем таковы, что данный ряд сходится, хотя бы в обобщенном смысле. Существуют методики, позволяющие просуммировать эти ряды и записать определяющие соотношения в конечном виде. [2, 3] *4N* параметров движения $J_{1,2j}$ и $\varphi_{1,2j}$ определяются из 2N условий совместности (4) и еще 2N условий удара, выражающих напряжение неудерживающей связи:

$$\Delta_k^{(1)}= u_k(\varphi_{1k});\quad -\,\Delta_k^{(2)}= u_k(\varphi_{2k}). \qquad (8)$$

Мы получили определяющее 4N – параметрическое представление и 4N уравнений для определения параметров движения. Эти соотношения позволяют существенно расширить круг моделей, рассматриваемых в традиционной теории виброударных систем.

Отметим, что подобные соотношения выписываются и в других случаях, например, суб-, супер-, и тому подобных типах периодических режимов, а также, когда, принадлежащие системе твердые тела, могут соударяться между собой [2, 3, 4]. Анализ выведенных соотношений может быть выполнен численно или в ряде случаев современными аналитическими методами.

Аналогично могут анализировать и более сложные системы – задачи динамики виброударных систем с распределенными ударными элементами [5]. Далее мы обратимся к системе, для которой можно найти точные решения для рассматриваемых несимметричных систем. Данная методика использовалась в [2, 3, 6]и других работах.

2. Рассмотрим линейную систему – однородную натянутую невесомую нить, содержащие прикрепленные через равные расстояния абсолютно твердые частицы, каждая из которых двигается между двумя несимметричными преградами (рис.2).

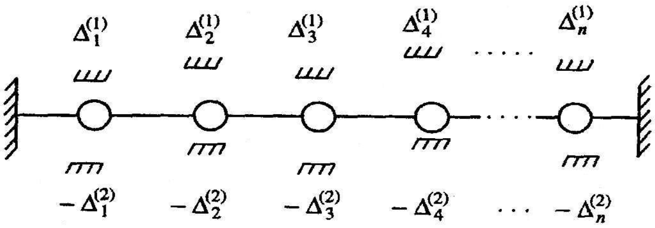

Рис. 2.

Предполагая, что сопротивление движению пропорционально абсолютным скоростям частиц, запишем определяющие уравнения движения, в линейном приближении:

$$mu_{1tt}+2bu_{kt}+c(2u_1-u_2) = \xi_1(t),\ mu_{ktt}+bu_{kt}+c_1(2u_k-u_{k-1}-u_{k+1}) = \xi_k(t); \quad (9)$$
$$mu_{Ntt}+2bu_{Nt}+c(2u_N-u_{N-1}) = \xi_N(t).$$

Силы возбуждения $\xi_k(t)$, приложенные к каждому из тел, предполагаются некоррелированными случайными процессами типа белых шумов с одинаковыми интенсивностями S. Таким образом $<\xi_k \xi_r> = S\delta_{kr}\delta(t-t^{/})$; δ_{kr} - символ Кронекера. Угловые скобки обозначают операцию статистического усреднения.

Теперь введем условия удара. Предполагая соударения абсолютно упругими, запишем их в виде неких граничных условий

$$-\Delta_{(k)}^{(2)} \le u_k \le \Delta_{(k)}^{(1)};\ u_k = -\Delta_{(k)}^{(2)}:\ u_{kt}(t_0-0) = -u_{kt}(t)(t_0+0)<0; \quad (10)$$
$$u_k = \Delta_{(k)}^{(1)}:\ u_{kt}(t_0-0) = -u_{kt}(t)(t_0+0)<0.$$

Граничные условия (10) определяют силы упругих ударов в каждой из $4N$ ударных пар. Приводя остальные параметры системы к единичной массе и, положив $m=1$, Запишем гамильтониан системы в виде:

$$H(u_k;\ y_k) = \sum {}^1/_2\, y^2_k + {}^1/_2 c\,[\,u_1^2 + u_N^2 + \sum c_2(u_q - u_{Nq})^2] + \ldots \quad (11)$$

где суммирование по k ведется от 1 до N; суммирование по q – в пределах от 2 до N-1; $u=(u_1,u_2,\ldots,u_N)$; $y=(y_1,y_1,\ldots y_N)$ – векторы фазовых координат; $y_k = u_{kt}$;многоточие обозначает отброшенные члены высших порядков.

Для решения поставленной задачи, то есть для описания искомого случайного процесса $\{u_k(t);y_k(t)\}$ воспользуемся методами диффузионных марковских процессов [9]. Предполагая процесс стационарным, будем искать его $2N$ – мерную стационарную совместную плотность вероятностей $p(u_1,u_2,\ldots,u_N;y_1,y_1,\ldots y_N) \equiv p(u_k,y_k)$. Запишем уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) для уравнений движения (9) и гамильтониана (11) в виде [7]:

$$\sum_{k=1}^{N}[\{H, p\}_k\, 2b\,\partial/\partial\,(y_k p) - {}^1/_2 S\,\partial^2 p/\partial\, y^2{}_k] = 0, \tag{12}$$

причем $\{H, p\}_k \equiv (\partial H/\partial\, y_k)(\partial p/u_k) - (\partial H/\partial\, u_k)(\partial p/\partial\, y_k)$ – скобка Пуассона для k-й частицы.

Граничные условия к уравнению (12) оказываются такими. Первое условие (10) ограничивает изменение координат системы в определенных пределах. Другие условия (10) в силу произвольности чисел $\Delta_к{}^{(1),(2)}$ приводят к требованию четности $p(u, y)$ по скоростям $y_к$; недостижимость бесконечных энергий приводит к требованию стремления этой функции к нулю, если хотя бы при одном k: $y_к \rightarrow \pm\infty$

Решение уравнения (12) дает известное в статистической физике каноническое распределение Гиббса:

$$p(u_k;\, y_k) = C\exp\{-4bS^{-1}H(u_k;\, y_k)\};\ -\Delta^{(2)}_{(k)} \le u_k \le \Delta^{(1)}_{(k)}. \tag{13}$$

Постоянная нормировки отвечает условию:

$$\int\limits_X \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(u;\, y)dudy = 1;\ \ X = \{-\Delta^{(2)}_{(k)} \le u_k \le \Delta^{(1)}_{(k)}\}.$$

Здесь интегрирование ведется по всем фазовым переменным, а $dz = dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$.

Нельзя не отметить, что задачу можно существенно расширить, отказавшись от предположения об одномерности движения $u_к$ и, соответственно, от столь специального вида двойных ограничителей. Получающиеся при таком расширении распределения Гиббса сохраняют свой вид, однако потребуется существенно более громоздкая интерпретация решений, которая здесь приведена быть не может.

3. Вернувшись к распределению (11), отмечаем, что по скоростям мы приходим к хорошо изученному распределению Максвелла

$$p(y) = C_2\exp\{-\, 2bS^{-1}\sum_{k=1}^{N} y^2{}_к\}. \tag{14}$$

Это распределение удобно здесь использовать для вычисления статистических характеристик импульсов ударов $J_k = 2|y_{-k}|$. После простых вычислений находим усеченное распределение

$$p(J) = [2b/\pi\, S]^{0,5N} exp\, [-b/2S\sum_{k=1}^{N} J^2{}_k],\qquad J_k \ge 0 \tag{15}$$

При посредстве этой формулы можно получить всю необходимую информацию об импульсах и силовых воздействиях в системе. Например, для нечетных и четных начальных моментов одномерных величин J_j после ряда вычислений [6] найдем:

$$m^{(2N+1)}(J_j)=\sqrt{\frac{2b}{\pi S}}\,\frac{N!}{2(b/2S)^{N+1}}\,;\quad m^{(2N)}(J_j)=Sb^{-1}(2N-1)!!.$$

Рассмотрим теперь распределение Больцмана по координатам:

$$p(u)=C_1\exp\{-\,2bcS^{-1}[u_1^{\,2}+u_N^{\,2}+\boldsymbol{\Sigma}c_2(u_q-u_{Nq})^2]\},\quad -\Delta^{(2)}_{(k)}\le u_k\le\Delta^{(1)}_{(k)}\,. \tag{16}$$

Одна из основных проблем состоит в определении наиболее относительно часто встречающихся конфигураций, сопровождаемых соударениями с какими-либо ограничителями.

Подсчет проделаем, исходя из определения среднего числа пересечений равновесного уровня $u_k = 0,\ k=1,\ 2,\ \ldots,N$ с положительной скоростью, то есть при $y_к>0$. Искомый средний уровень обозначим ω_0. Имеем:

$$\omega_0=\int_0^\infty y_1\,y_2\,\ldots y_N\,p(0,0,\,\ldots,0,\,y_1\,y_2\,\ldots y_N)dy_1\,dy_2\ldots\ldots\,dy_N\,,$$

что можно записать как

$$\omega_0=C\int_0^\infty y_1\,y_2\,\ldots y_N\,\exp\{-\,2bS^{-1}\sum_{k=1}^{N}y^2_к\,\}dy_1\,dy_2\ldots\ldots\,dy_N \tag{17}$$

После интегрирования получаем:

$$\omega_0=C\left(\frac{S}{4b}\right)^N.$$

Пусть $u_a=(u_{1a},u_{2a},\ldots,u_{Na})$ - какая-либо из конфигураций с ударами. Такая конфигурация содержит какое-то число тел, взаимодействующих с верхним (правым) ограничителем $u_{кa}=\Delta_к^{(1)}$, какое-то число тел, взаимодействующих с нижним (левым) ограничителем - $u_{ja}=\Delta_j^{(1)}$, и еще какое-то число тел, вообще не находящихся в контакте.

Пусть $U(u_a)$ - потенциальная энергия системы при реализации конфигурации u_a. Средняя частота пересечения такой конфигурации определяется как

$$\omega_{0a}=\int_0^\infty y_1\,y_2\,\ldots y_N\exp\{-\,2bS^{-1}\,[U(u_a)+\sum_{k=1}^{N}y^2_к\,]\}dy_1\,dy_2\ldots\ldots\,dy_N\,. \tag{18}$$

Сравнив (16) и (17), найдем

$$\omega_{o\alpha} = exp\ \{\ (-4\ b/S)\ U(u_\alpha)\}\ \omega_o.$$

Тогда Λ_a - относительная частота появления конфигурации - вычисляется как

$$\Lambda_\alpha \equiv \omega_o^{-1}\ \omega_{o\alpha} = exp\ \{\ (-4\ b\ S^{-1})\ U\ (u_\alpha)\ \}.$$

Отсюда видно, что относительно часто будут появляться "виброударные" конфигурации с меньшими потенциальными энергиями, - такие конфигурации, естественно, обладают минимальным числом изломов: удар происходит только в одной паре или несколько ударов происходят синфазно. Напротив, при антифазных конфигурациях величины U (u_α) и, следовательно, Λ_α растут. В симметричном случае более подробный анализ выполнен в [8]. Здесь такой анализ будет целиком зависеть от распределения структуры препятствий и представляет собой самостоятельную проблему.

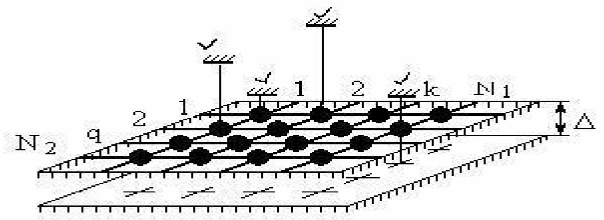

Рис. 3

.

Отметим также, что сказанное практически дословно остается в силе в случае, когда рассматриваются двухмерные системы, например, решетчатого типа с ограничителями, выбранными, для примера как показано на рис. 3.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-08-00941-а)

Литература

1. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Бабицкий В.И., Крупенин В.Л.* Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука, 1985. 384 с.
3. *Babitsky V.I.,. Krupenin V.L.* Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. 404 p.p.
4. *Крупенин В.Л.* О развитии методов частотно – временного анализа для расчета составных систем с большим числом ударных пар// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. №6. -С.40-51
5. *Крупенин В.Л.* К исследованию высших нелинейных форм колебаний виброударных систем с распределенными ударными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин 2005. № 6.- С. 31-38.

6. *Крупенин В.Л.* Колебания решетчатых двумерных конструкций в присутствии препятствий// – ДАН.- 2006. -Т. 400. -№2. -С. 1-4.
7. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.
8. *Krupenin V.L.* Vibro-impact processes in systems with multiple impact pairs and distributed impact elements // Dynamics of Vibro-impact systems. Proceeding of the Euromech Colloquim 15-18 September 1998. Springer. 1999. P.39-48.
9. *Крупенин В.Л.* К анализу динамики колеблющейся двумерной решетки //Научн. техн. Интернет журнал Вестник научно-технического развития
Url: http://www.vntr.ru/nomera/2007-2, 2007. №2. С.8-18 (дата обращения 20.05.09).

Поступила: 02.07.09.