

УДК 534.1

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ БАЛОК МОДЕЛЕЙ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА, РЭЛЕЯ И ТИМОШЕНКО, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

**В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Е.Е. Лисенкова, Н.П. Семерикова**  
*Нижний Новгород*

### *Аннотация*

*В работе рассматривается динамическое поведение балок моделей Бернулли-Эйлера, Рэля и Тимошенко, лежащих на нелинейном упругом основании. Приведен сравнительный анализ их дисперсионных зависимостей. Установлено, что поведение дисперсионной кривой балки Рэля качественно совпадает с поведением нижней ветви дисперсионной кривой балки Тимошенко. Учет кубической нелинейности упругого основания в этих моделях приводит к генерации высших гармоник, однако, взаимодействия между этими гармониками практически не происходит (проявление сильной дисперсии). Найдены области устойчивости и неустойчивости квазигармонических изгибных волн. Показано, что в отличие от модели Бернулли-Эйлера, модель Рэля может быть использована для исследования низкочастотных изгибных волн.*

**Ключевые слова:** *изгибные колебания балок, упругое основание, волна, дисперсия, модуляционная неустойчивость*

В связи с развитием высокоскоростного наземного транспорта и созданием поездов на магнитном подвесе обострился интерес к исследованию упругих конструкций, несущих подвижные нагрузки. Тенденция развития этих исследований идет по пути усложнения математических моделей, описывающих динамику железнодорожного пути, взаимодействующего с подвижным составом, грунтом и т.п. Например, если ранее для проведения анализа изгибных волн выбиралась балка (стержень) модели Бернулли-Эйлера [1], то в последнее время все чаще используется модель Тимошенко [2-9]. В связи с этим представляет интерес провести сравнительный анализ динамического поведения подпружиненных балок трех моделей: Бернулли-Эйлера, Рэля и Тимошенко.

Напомним, что в классической теории Я.Бернулли и Л.Эйлера предполагается, что 1) поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные оси стержня до деформации, во время изгиба остаются плоскими и перпендикулярными деформированной оси стержня; 2) нормальные напряжения на площадках, параллельных оси пренебрежимо малы, т.е. продольные сечения сопротивляются изгибу независимо, не оказывая друг на друга влияния; 3) инерцией вращения элемента стержня при изгибе пренебрегается [10-12]. В теории Рэля учитывается инерция вращения элемента стержня при изгибе, что приводит к изменению выражения для кинетической энергии стержня [10-12], а в теории Тимошенко, кроме этого, предполагается, что поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформированной оси стержня. Последнее обстоятельство приводит к дополнительным слагаемым в потенциальной энергии [10-12]. Учет упругого основания тоже дает вклад в потенциальную энергию стержня. Для

описания динамического поведения балки с учетом сдвиговых деформаций и инерцией ее сечения на поворот в качестве обобщенных координат выберем поперечное отклонение срединной линии  $u(x, t)$  и угол поворота сечения  $\varphi(x, t)$ , а упругое основание будем моделировать в соответствии с гипотезой Винклера [13]. В приближении малых колебаний плотность функции Лагранжа запишется в виде:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ \rho F u_t^2 + I \rho \varphi_t^2 - E I \varphi_x^2 - \chi G F (\varphi - u_x)^2 - h u^2 \right\}$$

Здесь  $x$  – пространственная координата;  $t$  – время;  $\rho$  – удельная плотность материала;  $E$  и  $G$  – модули упругости на сжатие и сдвиг;  $F$  – площадь поперечного сечения балки;  $I$  – момент инерции сечения на поворот;  $\chi$  – коэффициент Тимошенко ( $\cong 0.82$ ), учитывающий искривление сечения при сдвиговых деформациях;  $h$  – коэффициент упругости основания.

Подстановка  $\varphi(x, t) = u_x(x, t)$  приводит к лагранжиану для балки Рэлея, лежащей на упругом основании, а пренебрежение кинетической энергии на поворот – к лагранжиану для балки Бернулли-Эйлера. Уравнения динамики стержня могут быть получены из вариационного принципа Гамильтона–Остроградского [10-12] и для каждой из рассматриваемых моделей имеют вид:

$$\rho F u_{tt} + E I u_{xxxx} + h u = 0 \quad (1)$$

$$\rho F u_{tt} + E I u_{xxxx} - \rho I u_{xxtt} + h u = 0 \quad (2)$$

$$\begin{cases} \rho F u_{tt} - \chi G F (u_{xx} - \varphi_x) + h u = 0, \\ \rho I \varphi_{tt} - E I \varphi_{xx} + \chi G F (\varphi - u_x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение (1) – описывает изгибные колебания подпружиненной балки модели Бернулли-Эйлера, (2) – Рэлея, (3) – Тимошенко. Система (3) с помощью замены [14] сводится к одному уравнению относительно поперечного смещения срединной линии  $u(x, t)$ :

$$\begin{aligned} & u_{tttt} - \left( c_I^2 + c_{II}^2 \right) u_{xxtt} + \left( c_I^2 \frac{F}{I} + \bar{\omega}_*^2 \right) u_{tt} - \bar{\omega}_*^2 c_{II}^2 u_{xx} + \bar{\omega}_*^2 c_I^2 \frac{F}{I} u + \\ & + c_I^2 c_{II}^2 u_{xxxx} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{где } c_I = \sqrt{\chi G / \rho}, \quad c_{II} = \sqrt{E / \rho}, \quad \bar{\omega}_* = \sqrt{h / \rho F}.$$

Полагая  $u \sim \exp\{i(\omega t - kx)\}$ , где  $\omega$  – частота,  $k$  – волновое число бегущей волны, из (1), (2), (4) следуют дисперсионные уравнения

$$\begin{aligned} & -\omega^2 + c_{II}^2 \frac{I}{F} k^4 + \bar{\omega}_*^2 = 0 \\ & - \left( 1 + \frac{I}{F} k^2 \right) \omega^2 + c_{II}^2 \frac{I}{F} k^4 + \bar{\omega}_*^2 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\omega^4 - (c_I^2 + c_{II}^2)\omega^2 k^2 - \left(c_I^2 \frac{F}{I} + \bar{\omega}_*^2\right)\omega^2 + \bar{\omega}_*^2 c_{II}^2 k^2 + \bar{\omega}_*^2 c_I^2 \frac{F}{I} + c_I^2 c_{II}^2 k^4 = 0 \quad (6)$$

Разрешая их относительно частоты в безразмерных переменных:  $\omega' = \frac{\omega}{c_{II}} \sqrt{\frac{I}{F}}$ ,

$$k' = k \sqrt{\frac{I}{F}}, \quad \omega_*' = \frac{\bar{\omega}_*}{c_{II}} \sqrt{\frac{I}{F}}, \quad a' = \frac{c_I}{c_{II}}, \quad \text{получим}$$

$$\omega = \left\{k^4 + \omega_*'^2\right\}^{1/2} \quad (7)$$

$$\omega = \left\{\left(k^4 + \omega_*'^2\right) / \left(1 + k^2\right)\right\}^{1/2} \quad (8)$$

$$\omega = \left\{\left(1 + a'^2\right)k^2 + a'^2 + \omega_*'^2 \pm \left[\left(\left(1 - a'^2\right)k^2 + a'^2 - \omega_*'^2\right)^2 + 4a'^4 k^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2} 2^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Здесь и ниже для удобства пропущены штрихи над безразмерными переменными.

Наличие упругого основания приводит к существованию области непропускания (рис. 1), когда низкочастотное поле с частотой  $\omega$  меньше  $\omega_*$

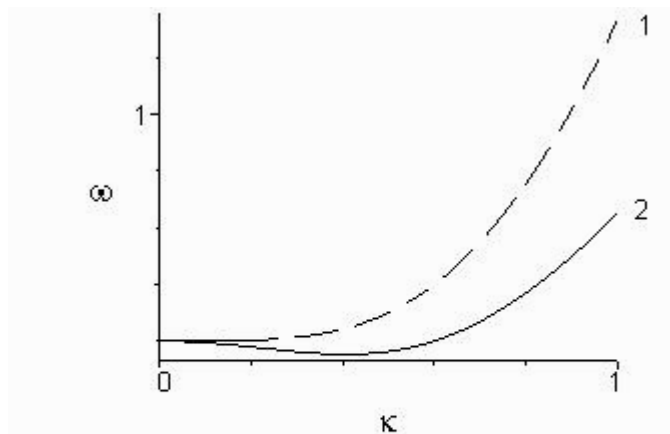


Рис. 1 Дисперсионные кривые:  
1 - модель Бернулли-Эйлера,  
2 - модель Рэлея

в балке Бернулли-Эйлера не распространяется, а экспоненциально спадает по мере проникновения в систему. Для Балки Рэлея эта область уже, поскольку наименьшая частота  $\left(2\left(\sqrt{1 + \omega_*'^2} - 1\right)\right)^{1/2}$  возбуждаемых в такой системе волн меньше  $\omega_*$ , характерной для балки Бернулли-Эйлера. Кроме того, при больших волновых числах кривая (8) в отличие от (7) стремится к асимптоте  $\omega = k$ .

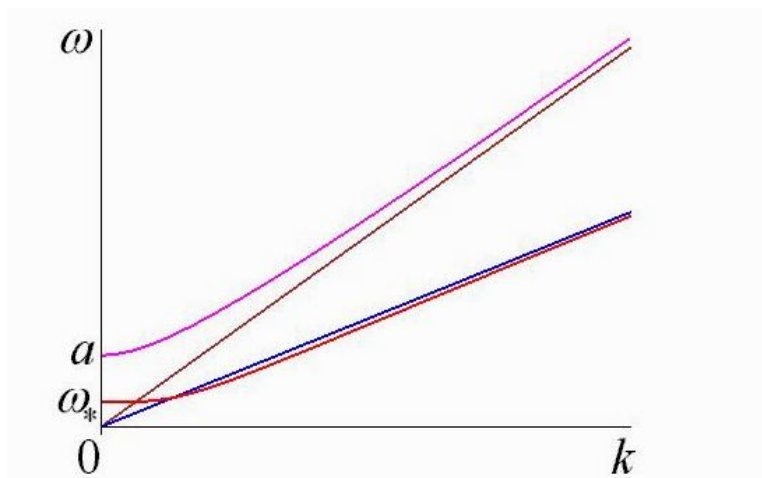


Рис. 2. Дисперсионная кривая для балки модели Тимошенко  
при  $a < \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$  и  $\omega_* < a^2/\sqrt{1-a^2}$

Для модели Тимошенко качественно различные случаи поведения дисперсионной кривой (9) в зависимости от параметров системы  $\omega_*$  и  $a$  подробно исследованы в работе [14]. На рис.2 приведена дисперсионная кривая, характерная для наиболее распространенных систем [14]. Она состоит из двух ветвей. Знак «+» в (9) соответствует верхней, а «-» – нижней ветвям дисперсионной кривой. Нижняя ветвь исходит из точки  $(0, \omega_*)$ , при больших волновых числах стремится к асимптоте  $\omega = ak$  и имеет две точки перегиба. Верхняя ветвь исходит из точки  $(0, a)$ , асимптотически приближаясь к прямой  $\omega = k$  и не имеет точек перегиба. Значение частоты, начиная с которой в такой системе возбуждаются волны, определяется выражением

$$\omega = \left\{ (1 - a^2) \omega_*^2 - 2a^4 + 2a^3 \sqrt{a^2 - \omega_*^2 (1 - a^2)} \right\}^{1/2} (1 - a^2)^{-1} < \omega_*,$$

т.е. область непропускания меньше, чем для балки Бернулли-Эйлера.

Обратим внимание, что поведение дисперсионной кривой балки Рэлея качественно совпадает с поведением нижней ветви дисперсионной кривой балки Тимошенко. Обе кривые имеют по две точки перегиба, соответствующие изменению знака групповой скорости ( $V_{gr} = d\omega/dk$ ). Существует область частот, для которой справедлив так называемый «эффект обратной волны», когда, несмотря на то, что фазовая скорость направлена в положительном направлении оси  $x$ , энергия в такой волне переносится в отрицательном направлении.

На возможность такой ситуации впервые указал Лэмб[15], построивший ряд моделей искусственных типов сред, обладающих данным свойством. Существенное внимание таким случаям уделял Мандельштам [16, 17]. Возможность противоположного

направления фазовой и групповой скоростей в идеально упругом изотропном теле впервые продемонстрирована в [18]. В случае упругих волноводов «обратная волна» описана в книге [19].

Дисперсионная кривая для балки Бернулли-Эйлера эти особенности не отслеживает (ср. рис. 1 и 2). При больших волновых числах первая из указанных кривых стремится к асимптоте  $\omega = k$ , вторая – к асимптоте  $\omega = ak$ . Это означает, что в коротковолновом диапазоне фазовые скорости волн близки, соответственно, к скоростям продольных волн и волн сдвига в стержне. Путем введения поправочного коэффициента в модели Рэля можно добиться более точного описания дисперсионных свойств реального стержня, в частности, в пределе при  $k \rightarrow \infty$  фазовая скорость будет близка к скорости сдвиговой волны.

С точки зрения практики представляет интерес учет нелинейности упругого основания. Для этого рассмотрим балку Рэля на нелинейно-упругом основании.

$$u_{tt} + u_{xxxx} - u_{xxtt} + \omega_*^2 u + \omega_{**}^2 u^3 = 0 \quad (10)$$

где  $\omega_{**} = u_0 \sqrt{\frac{h_1}{E} \frac{\sqrt{I}}{F}}$ , а  $u_0$  - амплитуда изгибной волны. Параметр нелинейности

$h_1$  является малой добавкой к жесткости основания ( $h_1 \ll h$ ). При  $h_1 > 0$  имеем систему с «жестким» типом нелинейности, а при  $h_1 < 0$  - с «мягким». Уравнение (10) записано в безразмерных переменных  $u' = u/u_0$ ,  $x' = x\sqrt{F/I}$ ,  $t' = t\sqrt{F/I}/c_{II}$  и штрихи над безразмерными переменными, как и ранее, опущены.

Наличие кубической нелинейности в уравнении (10) приводит, разумеется, к генерации высших гармоник, однако, как уже отмечалось не раз [12, 14], в таких системах эффект нелинейного самовоздействия волн обычно преобладает над эффектом генерации высших гармоник, и последним можно пренебречь. Это позволяет отыскивать решения уравнения (10) в виде одной квазигармоники с медленно меняющимися в пространстве и времени амплитудой и фазой

$$u = A(\varepsilon x, \varepsilon t) \exp[i(\omega t - kx)] + \text{к.с.}, \quad (11)$$

где  $A(x, t)$  - комплексная амплитуда,  $\omega$  и  $k$  удовлетворяют дисперсионному соотношению (5) и условию малости амплитудно-частотной модуляции

$$\frac{\partial A}{\partial x} / kA \sim \frac{\partial A}{\partial t} / \omega A \sim \varepsilon \ll 1, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} / kA \sim \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} / \omega A \sim \varepsilon^2,$$

через к.с. обозначена комплексно-сопряженная величина.

Используя метод усреднения по «быстрым» переменным [20], перейдем от исходного уравнения (10) к укороченному уравнению. В системе координат, движущейся с групповой скоростью  $\xi = x - V_{gr}t$ ,  $\tau = \varepsilon t$ , оно представляет собой нелинейное уравнение Шредингера относительно комплексной амплитуды:

$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} - \beta \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} + \alpha |A|^2 A = 0 \quad (12)$$

Здесь  $\beta = dV_{gr}/2dk = d^2\omega/2dk^2$  - дисперсионный параметр,  
 $\alpha = \frac{3\omega_{**}^2}{2\omega(1+k^2)}$  - нелинейный параметр.

Уравнение (12) часто встречается при изучении волновых процессов в оптике, физике плазмы, акустике, электродинамике [20,21]. Оно позволяет, в частности, исследовать устойчивость квазигармонической волны (11) по отношению к малым начальным возмущениям. Если нелинейный и дисперсионный параметры уравнения

Шредингера имеют противоположные знаки, т.е.  $\alpha \cdot \beta = \frac{d^2\omega}{dk^2} \cdot \alpha < 0$ , то, согласно

критерию Лайтхилла [21], в системе будет наблюдаться самомодуляция (модуляционная неустойчивость), трансформирующая квазигармоническую волну (11) в набор волновых пакетов. Этот эффект характеризуется усилением боковых компонент в спектре модулированной волны, в которые будет перекачиваться энергия из центральной части спектра возмущения (рис. 3)

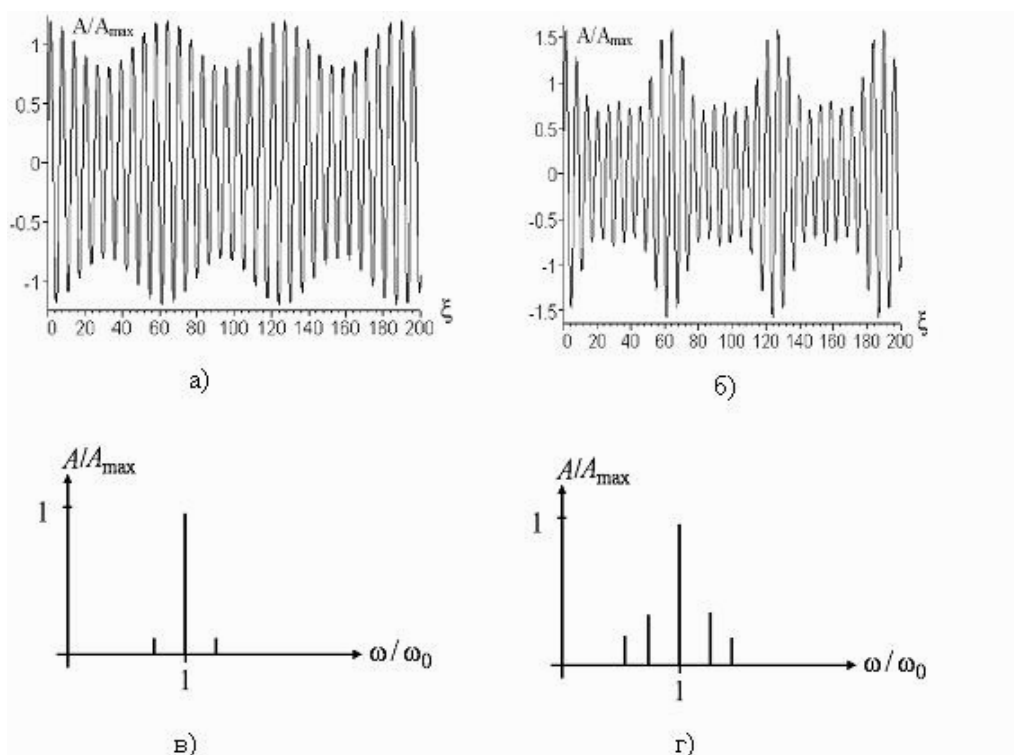


Рис. 3 Трансформация модулированной волны (а, б) и эволюция ее спектра (в, г)

Знаки коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  в (10) зависят от соотношений между частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$ , а знак  $\alpha$  зависит также и от типа нелинейности упругого

основания.

Расчеты показали, что в системе с «жесткой» нелинейностью знак параметра дисперсии  $\beta$  может изменяться, что связано с наличием у кривой двух точек перегиба  $k_1^*, k_2^*$ , определяемые из уравнения

$$k^8 - 2k^6(1 + 3\omega_*^2) - 6k^4\omega_*^2 - 2k^2\omega_*^2(3 + \omega_*^2) + \omega_*^4 = 0$$

В итоге получаем, что существует область устойчивости квазигармонических изгибных волн, волновые числа которых расположены между точками перегиба ( $k_1^* < k < k_2^*$ ), а области неустойчивости волн находятся в интервалах  $0 < k < k_1^*$  и  $k > k_2^*$ . На рис.4 изображена диаграмма, показывающая, при каких частотах  $\omega$  и волновых числах  $k$  возможна модуляционная неустойчивость изгибных волн в стержне. Область устойчивости отмечена квадратами, область неустойчивости - крестами.

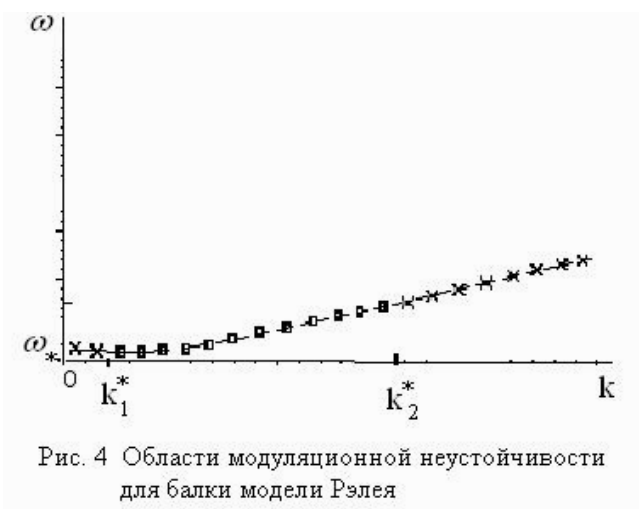


Рис. 4 Области модуляционной неустойчивости для балки модели Рэлея

В системе с «мягким» типом нелинейности изменяется знак параметра нелинейности в уравнении (12), что приводит к смене областей устойчивости и неустойчивости. В интервале  $k_1^* < k < k_2^*$ , волны будут неустойчивыми.

Аналогичный результат справедлив для балки модели Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании [14]. Квазигармонические изгибные волны могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми в зависимости от частоты и принадлежности к той или иной дисперсионной ветви, причем для нижней ветви аналогично описанному выше. Модель балки Бернулли-Эйлера дает иной результат [12]: модуляционная неустойчивость невозможна.

Таким образом, для исследования низкочастотных изгибных волн в качестве наиболее простой модели может быть использована балка модели Рэлея, лежащая на упругом основании, а не Бернулли-Эйлера, поскольку последняя даже для длинных волн не дает удовлетворительного приближения дисперсии к реальному стержню.



Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09-08-00188 и № 09-08-00827).

### Литература

1. Крысов С.В. Вынужденные колебания и резонанс в упругих системах с движущимися нагрузками. – Горький. Изд-во ГГУ. 1985. 72 с.
2. Felszeghy S.F. The Timoshenko beam on an elastic foundation and subject to a moving step load // Journal of Vibration and Acoustics. 1996. Vol.118. No 3. P.277-284.
3. Kim J.H., Choo Y.S. Dynamic stability of a free-free Timoshenko beam subjected to a pulsating follower force // Journal of Sound and Vibration. 1998. Vol.216. No 4. P.623-636.
4. Lee H.P. Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass // Applied Acoustics. 1998. Vol.55. No 3. P.203-215.
5. Suiker A.S.J., de Borst R., Esveld C. Critical behavior of a Timoshenko beam half plane system under a moving load // Archive of Applied Mechanics. 1998. V.68. No 3-4. P.158-168.
6. Wu T.X., Thompson D.J. A double Timoshenko beam model for vertical vibration analysis of railway track at high frequencies // Journal of Sound and Vibration. 1999. Vol.224. No 2. P.329-348.
7. Metrikine A.V., Verichev S.N. Instability of a moving two-mass oscillator on a flexibly supported Timoshenko beam // Archive of Applied Mechanics. 2001. V.71. P.613-624.
8. Verichev S.N. Instability of a vehicle moving on an elastic structure. Delft University Press. The Netherlands. 2002. 190 p.
9. Suiker A.S.J. The mechanical behaviour of ballasted railway tracks. Delft University Press. The Netherlands. 2002. 236 p.
10. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. /Ред. совет: Фролов К.В. (пред.). – М.: Машиностроение. Т. 1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. и доп. /Под ред. Болотина В.В. 1999. 504 с.
11. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Наука, Физматлит. 2001. 320 с.
12. Ерофеев В.И., Кажаяв В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Наука, Физматлит. 2002. 208 с.
13. Winkler E. Der Eisenbahn-Oberbau. Prag. 1871. 250 S.
14. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Дисперсионные зависимости и самомодуляция изгибных волн в балке Тимошенко, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 4. С. 27-31.
15. Lamb H. On group velocity // Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2. 1904. Vol. 1. No 849. P. 473-479.
16. Манделъштам Л.И. Групповая скорость в кристаллической решетке // Полн.собр.тр.: в 5-ти т. М.: Изд-во АН СССР, 1947. Т.2. С.334-338.
17. Манделъштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 437 с.
18. Tolstoy I., Usdin E. Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion // J. Acoust. Soc. Amer., 1957. Vol. 29. No 1. P. 37-42.
19. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.



- Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
20. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука. 1984. 432 с.
  21. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир. 1977. 622 с.

*Поступила: 10.06.09.*