

УДК 621.01

К ИССЛЕДОВАНИЮ МНОГОКОНТУРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ МАШИН, ВКЛЮЧАЮЩИХ МЕХАНИЗМЫ С НЕЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОЛОЖЕНИЯ

И.И. Вульфсон

Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна,
Россия, Санкт-Петербург

Вводные замечания. В машинах циклового действия и автоматических линиях с регулярными колебательными системами приходится сталкиваться с широким распространением динамически идентичных модулей, используемых для реализации однотипных технологических и транспортных операций [1,2]. В подобных случаях ввиду естественного стремления к унификации и взаимозаменяемости отдельных узлов машины возникает определенная повторяемость блоков динамической модели приводов. Такая ситуация, в частности, встречается в машинах текстильной, легкой, пищевой, полиграфической и ряда других отраслей промышленности при повышенной протяженности зоны технологической обработки. Теория регулярных колебательных систем базируется на анализе цепочек осцилляторов и восходит к работам Борна и Кармана, посвящённым исследованию теплоёмкости кристаллов [3]. Эти работы легли в основание так называемой теории цепочек, с помощью которой удаётся осуществить аналитическое описание динамических характеристик моделей с большим числом степеней свободы, базируясь на анализе одного структурного элемента системы. Ряд примеров, иллюстрирующих развитие этой теории, для некоторых нелинейных цепочек нашли отражение в монографии [4].

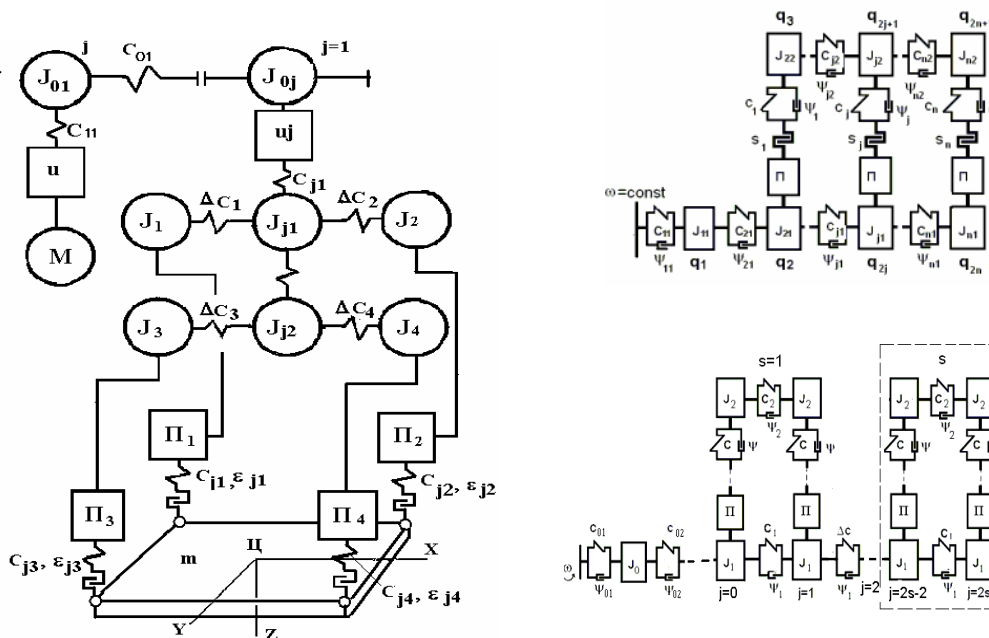


Рис.1

Применительно к машинам с цикловыми механизмами теория регулярных колебательных систем нуждается в дополнительной разработке. Во-первых, динамические модели приводов имеют более сложную внутреннюю структуру каждого повторяющегося модуля, которые образуют не только односвязные цепочки, но и разветвлённые (рис.1,а), кольцевые (рис.1,б) и разветвлённо-кольцевые колебательные системы (рис.1,в). (Приняты следующие условные обозначения: m, J – масса и момент инерции, c – коэффициент жёсткости, ψ – коэффициент рассеяния, Π – кинематический аналог механизма, осуществляющего трансформацию абсолютных координат $\varphi_j = \Pi(\varphi_{j-1})$). Кроме того, такая необходимость связана со специфическими особенностями цикловых механических систем, среди которых отметим нелинейность функции перемещения, нестационарность динамических связей, возможность нарушения кинематического контакта в зазорах и др. В ряде случаев условия регулярности реализуются лишь приближенно, и колебательная система оказывается квазирегулярной [5]. Помимо представленных на рис.1 крутильных и крутильно-продольных колебательных систем они могут также включать и изгибные подсистемы. Данный доклад в известной степени носит обзорный характер, однако определённое внимание уделено совершенствованию методики аналитического исследования моделей разветвлённо-кольцевой структуры.

Первый этап исследования рассматриваемого класса систем связан с частотным и модальным анализом. На этом этапе при сохранении неразрывности кинематического контакта с помощью метода условного осциллятора осуществляется линеаризация функции положения в окрестности программного движения [1,2,4,5].

Модели разветвлённой структуры. Показанная на рис.1,а динамическая модель соответствует одной секции привода стола иглопробивной машины. Эти секции образуют регулярную цепную колебательную систему, которая описывается разностными уравнениями. При учёте граничных условий формальное частотное уравнение имеет вид [1,2,5]

$$\frac{\cos(n-0,5)\theta}{\cos(n+0,5)\theta} - 1 = \frac{R_0(p)}{c_{01}}, \quad (1)$$

где $R_0(p) = c_{11} - p^2 J_{01}$ – динамическая жёсткость приводного механизма; $\theta = \arccos[1 + 0,5R(p)/c_{01}]$; $R(p)$ – динамическая жёсткость повторяющегося модуля j ; n – число модулей; p – медленно меняющаяся «собственная» частота.

Модели кольцевой структуры. Рассматривается динамическая модель привода (рис.1,б) состоящая из подсистем главного вала ($k=1$) и исполнительного органа ($k=2$), связанного с главным валом n цикловыми механизмами. Каждый из механизмов представлен в виде последовательного соединения элементов, учитывающих инерционные, упругодиссипативные и кинематические характеристики, а также приведенный зазор s_j в кинематических парах. Матричная форма рекуррентных зависимостей для модуля j имеет вид

$$\begin{bmatrix} K_{1j} \\ Q_{1j} \\ K_{2j} \\ Q_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_1^{-1} & 0 & 0 \\ AB^{-1} & A(BC_1)^{-1} + 1 & -B^{-1} & -(BC_2)^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & c_2^{-1} \\ -B^{-1} & -(BC_1)^{-1} & DB^{-1} & D(BC_2)^{-1} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,j-1} \\ Q_{1,j-1} \\ K_{2,j-1} \\ Q_{2,j-1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$A = \Pi' - J_1 p^2 (c\Pi')^{-1} \quad B = (c\Pi')^{-1}; \quad C = -p^2 [J_2 - J_1(1 - J_2 \Omega^2 / c)] / \Pi'; \quad D = (1 - J_2 p^2 / c) / \Pi';$$

$K_{1j}, K_{2j}, Q_{1j}, Q_{2j}$ – медленно меняющиеся амплитуды колебаний и сил на главном валу и исполнительном органе.

Рекуррентные зависимости (2) можно рассматривать как однородную систему разностных уравнений, нетривиальное решение которой ищем в форме $K_{rj} = \lambda K_{r,j-1}$, $Q_{rj} = \lambda Q_{r,j-1}$, где в нашем случае характеристические показатели λ являются медленно меняющимися функциями, которые определяются как корни следующего возвратного уравнения [1,2,6]:

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0, \quad (3)$$

Используя подстановку $\lambda + \lambda^{-1} = z$, трансформируем уравнение (3) в два квадратных уравнения, корнями которого являются $\lambda_{1,2,3,4} = 0,5(z_{1,2} \mp \sqrt{z_{1,2}^2 - 4})$, где $z_{1,2} = 0,5[-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}]$; $a = -[4 + A(BC_1)^{-1} + D(BC_2)^{-1}]$; $b = 2B^{-1}(Ac_1^{-1} - Dc_2^{-1}) + (B^2 c_1 c_2)^{-1}(C - 1) + 6$. Можно показать, что числа $z_{1,2}$ – действительные [1]. При этом $\theta_k = \arccos 0,5z_k$ при $|z_k| < 2$, $\theta_k = \operatorname{arch} 0,5z_k$ при $z_k > 2$ и $\theta_k = \operatorname{arch} 0,5|z_k| + i\pi$ при $z_k < -2$. Спектр «собственных» частот может быть определен на основании следующего частотного уравнения:

$$w_{43}(v)[w_{21}(v) + w_{22}(v)\xi(v)] - w_{23}(v)[w_{41}(v) + w_{42}(v)\xi(v)] = 0, \quad (4)$$

где w_{ik} – элементы матрицы $\mathbf{W} = \Gamma^n$; R_0 – динамическая жесткость на «входе», $\xi(v) = c\xi_1 / R_0(v)$, $v = p/k_1$, $k_1 = \sqrt{c_1/J_1}$; Γ – матрица перехода (см. (2)).

Модели разветвлённо-кольцевой структуры с сосредоточенными параметрами. В работе [7] было показано, что устранение некоторых упругих связей в подсистеме исполнительного органа может привести к существенному уменьшению виброактивности системы, вызванной зазорами. В этом случае каждый модуль соединяется с главным валом в нескольких сечениях, и колебательная система оказывается разветвленно-кольцевой. Каждый повторяющийся модуль, выделённый на рис.1, в штриховой линии, имеет более сложную структуру. Однако теперь мы располагаем двумя дополнительными граничными условиями, согласно которым амплитудные значения нагрузки на концах каждой секции исполнительного органа равны нулю. При использовании этих условий в работе [8] получены следующие рекуррентные зависимости:

$$\begin{bmatrix} K_{1,j+1} \\ Q_{1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,j-1} \\ Q_{1,j-1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\text{где } \gamma_{11} = \frac{1 + (R_1 - b_{11}R_2)/c_1}{1 + b_{12}R_2/c_1}; \quad \gamma_{12} = \frac{\Delta c^{-1}[c_1^{-1}(R_1 - b_{11}R_2) + 1] + c_1^{-1}}{1 + b_{12}R_2/c_1}; \quad \gamma_{21} = (R_1 - R_2R_4)(1 + \gamma_{11});$$
$$\gamma_{22} = 1 + (R_1 - R_2R_4)(\Delta c^{-1} + \gamma_{12}).$$

Здесь введены в рассмотрение следующие функции: $A/B = R_1$; $B^{-1} = R_2$; $D/B = R_3$; $D^{-1} = R_4$; $b_{11} = (1 + R_3/c_2)(2 + R_3/c_2)^{-1}$; $b_{12} = R_4(2 + R_3/c_2)^{-1}$; $b_{21} = b_{11}(1 + R_3/c_2) - R_2/c_2$; $b_{22} = b_{12}(1 + R_3/c_2)$.

Корни характеристического уравнения соответствующей системы разностных уравнений равны $\lambda_{1,2} = \kappa \pm i\sqrt{1 - \kappa^2}$, где $\kappa = \gamma_{11} + \gamma_{22}$; $i = \sqrt{-1}$. При $\kappa < 1$ ($\text{Im } \eta \neq 0$) характеристические множители представляют собой взаимно сопряженные комплексные числа с модулем, равным единице. Принимая $\kappa = \cos \theta$, $j = 2s$, при $\kappa \leq 1$ имеем

$$\left. \begin{aligned} K_{1s} &= h_1 \cos s\theta + h_2 \sin s\theta; \\ Q_{1s} / \Delta c &= h_1 [\cos(s+1)\theta - \cos s\theta] + h_2 [\sin(s+1)\theta - \sin s\theta]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

На основании (6), задав граничные условия на главном валу, получаем частотное уравнение в форме (1). Если динамическая жёсткость на «входе» $R_0 \rightarrow \infty$,

$$\theta_r = 0,5\pi(2r - 1)/(n + 0,5) \quad (r = \overline{1, n}). \quad (7)$$

При $\kappa > 1$ ($\text{Im } \eta = 0$), принимая $\kappa = \text{ch } \theta$, получаем зависимости, отличающиеся от (6) лишь тем, что тригонометрические функции заменены одноименными гиперболическими.

В работе [9] на базе рассмотренной модели исследуются вынужденные колебания. При этом показано, что в окрестности парциальных частот подсистемы, полученной при абсолютно жёстком главном валу имеет место высокая плотность спектра собственных частот, что приводит к повышенной протяжённости диапазона резонансного состояния системы.

Континуальные модели разветвлённо-кольцевой структуры. Согласно модификации метода континуальной идеализации, изложенной в работах [1,2], представим n идентичных механизмов в виде псевдосреды. Это среда, образованная «размазыванием» упругих и инерционных характеристик вдоль осей соответствующих валов, обладает свойством передавать моменты и движение только вдоль слоя среды, причем взаимодействие между слоями осуществляется лишь через подсистемы главного вала и исполнительного органа. Характеристикой псевдосреды служит распределенная модифицированная матрица перехода

$$\tilde{\Gamma} = \prod_{\max k}^1 \tilde{\Gamma}_k = \begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $\max k$ – число элементов механизма, $\tilde{\Gamma}_k$ – матрица перехода элемента.

Использование континуальной идеализации применительно к регулярным системам, образованными цепочкой осцилляторов, впервые было предложено Дебаем в 1912 г. Теория Дебая дала удовлетворительные результаты при исследовании теплоёмкости кристаллов как однородной среды (подробнее см. [3]). Л.И. Мандельштам выска-

зал предположение, что этот подход может быть успешно применён, если параметры «размазаны» с переменной плотностью, обладающей периодичностью. В рассматриваемой модели (см. рис.1,в) эта плотность описывается медленно меняющейся пространственно периодической кусочно-постоянной функцией.

На первом этапе проведём частотный и модальный анализ. Отметим, что исследование спектра частот и анализ форм свободных колебаний необходим не только для выявления резонансных зон, но представляет также самостоятельный интерес, поскольку эти колебания периодически возбуждаются при выборке зазоров в кинематических парах механизмов [7]. Выделим в произвольном модуле s подсистему кольцевой структуры, состоящую из двух валов с распределительными параметрами. Эти подсистемы связаны псевдосредой, в которой на основании (1) и (2) учтены упругие, инерционные и кинематические характеристики цикловых механизмов. На стадии определения частотных и модальных свойств привода диссипативные силы без ущерба для точности могут быть опущены. Данному фрагменту модуля s отвечает следующая система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_v \frac{\partial \varphi_v}{\partial t}) - G \left[\frac{\partial}{\partial x} (I_v(x) \frac{\partial \varphi_v}{\partial x}) \right] - M_v(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \quad (v = 1, 2), \quad (9)$$

где $\varphi_v(x, t) = \varphi_v^*(t) + q_v(x, t)$; φ_v^* – идеальный угол поворота вала v , реализуемый в программном движении ($\varphi_1^* = \omega t$, $\varphi_2^* = \Pi(\varphi_1^*)$); q_v – динамическая ошибка; I_v, ρ_v – полярный момент инерции сечения и массовый момент инерции единицы длины вала v ; G – модуль сдвига; M_v – отнесенный к длине участка вала l реактивный момент, действующий со стороны механизмов, (см. ниже).

Представим приближенное частное решение полученной на базе (9) однородной системы уравнений в форме

$$q_1 = X(x, \tau)\Psi(t); \quad q_2 = Y(x, \tau)\Psi(t), \quad (10)$$

где τ – «медленное» время (обычно $\tau = \varphi_1^*$).

Далее отделим «медленные» составляющие функции M_v от быстрых, приняв $M_v = \mu_v(x, \tau)\Psi(t)$. В соответствии с методом условного осциллятора для каждой формы решение может быть охвачено одним дополнительным условием, при котором $\partial^2 q_v / \partial t^2 \approx -p^2(\tau)q_v$, где функция p может рассматриваться как переменная «собственная» частота. Можно показать, что медленно меняющиеся амплитудные функции реактивных моментов описываются следующими зависимостями [1,2]:

$$\mu_1 = \mu_{11}X + \mu_{12}Y; \quad \mu_2 = \mu_{21}X + \mu_{22}Y, \quad (11)$$

где $\mu_{11} = -A/B$; $\mu_{22} = -D/B$; $\mu_{12} = \mu_{21} = B^{-1}$.

Принимая $I_v(x) = \text{const}$ при учете (9), (10), (11) для рассматриваемой формы имеем

$$X'' + R_{11}X + R_{12}Y = 0; \quad Y'' + R_{21}X + R_{22}Y = 0, \quad (12)$$

где $R_{11} = (\rho_1 p^2 + \mu_{11})/(GI_1)$; $R_{22} = (\rho_2 p^2 + \mu_{22})/(GI_2)$; $R_{12} = \mu_{12}/(GI_1)$; $R_{21} = \mu_{21}/(GI_2)$; $()' = \partial / \partial x$.

Характеристическое уравнение согласно (12), имеет вид

$$\lambda^4 + \lambda^2(R_{11} + R_{22}) + R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21} = 0. \quad (13)$$

Можно показать, что корни уравнения (13) λ_1, λ_2 – либо мнимые, либо действительные (но не комплексные). Введем в рассмотрение следующие функции:

$$f_k(x) = \begin{cases} \cos(\theta_k x/l) & (\lambda_k^2 < 0); \\ \text{ch}(\theta_k x/l) & (\lambda_k^2 > 0); \end{cases} \quad v_k(x) = \begin{cases} \sin(\theta_k x/l) & (\lambda_k^2 < 0); \\ \text{sh}(\theta_k x/l) & (\lambda_k^2 > 0), \end{cases} \quad (14)$$

где $\theta_k = |\lambda_k(\tau)|l$.

Тогда

$$\begin{aligned} X_s(x) &= h_{1s}f_1(x) + h_{2s}v_1(x) + h_{3s}f_2(x) + h_{4s}v_2(x); \\ Y_s(x) &= \beta_1[h_{1s}f_1(x) + h_{2s}v_1(x)] + \beta_2[h_{3s}f_2(x) + h_{4s}v_2(x)], \end{aligned} \quad (15)$$

где $\beta_k = -(R_{11} + \lambda_k^2)/R_{12} = -R_{21}/(R_{22} + \lambda_k^2)$; $k = 1, 2$; $x \in [0, l]$ (функцию β_k можно трактовать как медленно меняющийся коэффициент пространственной формы).

Крутящие моменты на концах секции исполнительного органа равны нулю. При определении соответствующих граничных условий следует иметь в виду, что функция Y описывает динамическую ошибку, которая отличается от деформации $\Delta Y = Y - \Pi(X)$. При малых значениях X имеем $\Delta Y \approx Y - \Pi'X = (\beta_{1,2} - \Pi')X$, где $\Pi' = d\phi_2/d\phi_1$. Тогда $\Delta Y'_s(0) = h_{2s}(\beta_1 - \Pi')v'_1(0) + h_{4s}(\beta_2 - \Pi')v'_2(0) = 0$. Приведенные зависимости определяют матрицу перехода $\mathbf{Z} = \left\| z_{k,j} \right\|$, соответствующую длине l исполнительного органа. При определении элементов матрицы перехода \mathbf{Z} можно избежать громоздких аналитических выкладок. Достаточно произвести два простых счета при $X_s^{(1)}(0) = 1$, $X_s^{(2)}(0) = 0$ и $X(0)_s^{(2)} = 0$, $X_s^{(1)}(0) = 1$. Легко убедиться, что согласно (14) при этом $X_s^{(1)}(l) = z_{11}$, $X_s^{(2)}(l) = z_{21}$, $X_s^{(1)}(l) = z_{21}$, $X_s^{(2)}(l) = z_{22}$ (Здесь верхний индекс в скобках отвечает номеру счета). Матрица перехода для модуля s определяется как $\mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{W}$, где \mathbf{W} – матрица перехода соединительного элемента (муфты) между соседними секциями главного вала. При коэффициенте жёсткости муфты Δc имеем $u_{11} = z_{11}$; $u_{12} = z_{11}\zeta_1 + z_{12}$; $u_{21} = z_{21}$; $u_{22} = z_{21}\zeta_1 + z_{22}$, где $\zeta_1 = c_1/\Delta c$; $c_1 = GI_1/l$.

Итак, задача сведена к анализу регулярной колебательной системы, определяемой следующими рекуррентными зависимостями:

$$X_s(l) = u_{11}X_{s-1}(l) + u_{21}X'_{s-1}(l); \quad X'_s(l) = u_{21}X_{s-1}(l) + u_{22}X'_{s-1}(l), \quad (16)$$

а частотное уравнение приводится к виду (1) при $\theta_k = \arccos \chi_k$ ($|\chi_k| < 1$), $\theta_k = \text{Arch} \chi_k$ ($\chi_k > 1$), $\theta_k^0 = \text{Arcch} |\chi_k|$ ($\chi_k < -1$), где $\chi_k = 0,5(u_{11} + u_{22})_k$.

Для иллюстрации и качественной оценки результатов анализа примем следующие исходные данные: $\rho_1 = (J_{10} + J_1n)/l = 0,5$; $\rho_2 = (J_{20} + J_2n)/l = 0,3$ кгм; $G_1I_1/l^2 = 10^4$; $GI_2/l^2 = 2,5 \cdot 10^3$ Н; $\Delta c = 2 \cdot 10^3$ Нм. Механизмы схематизированы в виде последовательного соединения кинематического аналога механизма, отвечающего функции положения $\Pi(\phi_1^*)$, и упругого элемента c при $d\Pi/d\phi_1 = \alpha \sin \phi_1^*$, $cn/l = 4 \cdot 10^3$ Н (инерционные характеристики входных и выходных звеньев механизмов учтены при определении ρ_1 и ρ_2). График $p_*(\phi_1^*)$, разделяющий согласно (21) две области решений, приведен на рис.2.

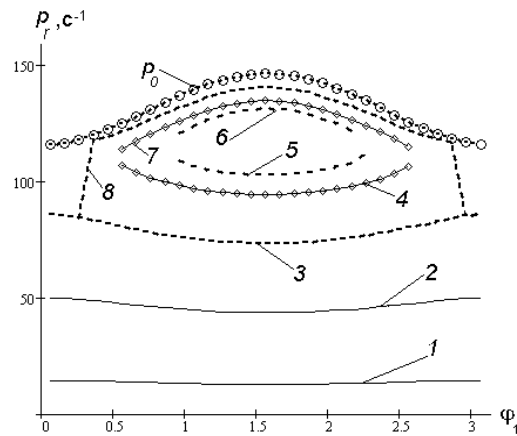


Рис.2

Остальные графики отвечают медленно меняющимся «собственным» частотам, определенным по формулам (15), (16) при $n = 4$, $\zeta = 2$, $\alpha = 1$ (номер кривой соответствует номеру r). Непосредственно к кривой p_* примыкает зона с повышенной плотностью распределения частотного спектра (кривые 4–8), которая располагается в окрестности так называемой точки сгущения $p^0 = \sqrt{c/J_2} = 119 \text{ с}^{-1}$ [1,2,4]. При малых значениях $\Pi'(\varphi_1^*)$ наблюдается эффект «расщепления» частот (кривые 3 и 8, 4 и 7, 5 и 6) и исчезновение некоторых составляющих частотного спектра (кривые 4 – 7).

При расчете вынужденных колебаний можно воспользоваться несколькими подходами. Один из них связан с переходом к квазинормальным координатам на базе выявленных нестационарных форм свободных колебаний, что соответствует приближенному разложению в ряд по «собственным» функциям [1]. Здесь мы ограничимся рассмотрением упрощенного способа оценки уровня вынужденных колебаний при гармоническом кинематическом возбуждении $\varepsilon = d^2\varphi_2/dt^2 = \omega^2(d^2\varphi_2/d\varphi_1^{*2})$. Представим ε в виде ряда

Фурье $\varepsilon = \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 w_m \cos(m\varphi_1^* + \vartheta_m)$. Далее усредним функции $\Pi'(\varphi_1^*) = d\varphi_2^*/d\varphi_1^*$ на периоде 2π и найдем частное решение системы уравнений (9) для гармоники m :

$$X_m^* = -R_{12}^{(m)} m^2 \omega^2 w_k / (R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} - R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)});$$

$$Y_m^* = R_{11}^{(m)} m^2 \omega^2 w_k / (R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} - R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)}). \quad (17)$$

Здесь верхний индекс (m) отвечает подстановке $m\omega$ вместо p (см. выше). При заданных граничных условиях амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) в сечениях s главного вала и исполнительного органа $a_{1s}(m\omega, s)$, $a_{2s}(m\omega, s)$ определяются как

$$a_{1s} = \left| (b_1 \cos s\gamma + b_2 \sin s\gamma) / \Delta + X_1^* \right|, \quad a_{2s} = \left| \beta_1 (b_1 \cos s\gamma + b_2 \sin s\gamma) / \Delta + Y_1^* \right|, \quad (18)$$

$$\text{где } b_1 = -X^* \zeta^{-1} \cos[(n + 0,5)\gamma] / \Delta, \quad b_2 = -X^* \zeta^{-1} \sin[(n + 0,5)\gamma] / \Delta,$$

$$\Delta = \cos[(n + 0,5)\gamma](1 + \zeta^{-1}) - \cos[(n + 0,5)\gamma].$$

Зависимость, определяющая параметр γ , отличается от приведенных выше лишь тем, что частота p заменена на $m\omega$:

$$0,5[u_{11}(m\omega) + u_{22}(m\omega)] = \cos \gamma(m\omega). \quad (19)$$

Таким образом, при расчёте АЧХ для гармоника $m\omega$ достаточно воспользоваться формулами (18), (19). Легко убедиться в том, что $\Delta = 0$ при $m\omega = p_r$, т.е. соответствует резонансному режиму (без учета диссипации).

Работа выполнена при поддержке ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы».

Литература

1. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия, Машиностроение: Ленинград, 1990. 306с.
2. Vulfson I. Vibroactivity of branched and ring structured mechanical drives. Hemisphere Publ. Corpor.: New York, Washington, London 1988. 99 p.
3. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
4. Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука. Физматлит, 1997. 496 с.
5. Вульфсон И.И. Динамическое исследование многосекционных технологических машин, образующих колебательные системы квазирегулярной структуры // Сб. докл. Международного симпозиума «Образование через науку». МГТУ им. Н.Е.Баумана: М., 2006. С.172–179.
6. Вульфсон И.И. К проблеме декомпозиции регулярных колебательных систем цикловых машин, включающих идентичные модули кольцевой структуры. Проблемы машиностроения и надежности машин, № 4. С.15–22.
7. Вульфсон И.И., Преображенская М.В. Исследование колебательных режимов, возбуждаемых при переключке в зазорах цикловых механизмов, соединенных с общим исполнительным органом. Проблемы машиностроения и надежности машин, №1. С.33–39.
8. Вульфсон И.И. Регулярные крутильные колебательные системы с сосредоточенными параметрами приводов цикловых машин разветвленно-кольцевой структуры // Теория механизмов и машин. Т.6. №1(11). 2008. С.48–54.
9. Вульфсон И.И. Аналитическое исследование вынужденных крутильных колебаний приводов цикловых машин разветвленно-кольцевой структуры // Теория механизмов и машин. Т.6. №2(12). 2008. С.82–90.

Поступила: 12.05.09.