УДК 621.01

ВОЗДЕЙСТВИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИИ НА КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛА

Л.Я. Банах

Институт машиноведения РАН, Россия, Москва

Динамическая модель системы представляет собой горизонтальный вал, обладающий крутильной жесткостью *k*, с насаженным на него жестким диском и шкивом 2 (рис.1). Привод осуществляется от шкива; при этом возможны два режима- равномерное вращение $\gamma = \omega t,\ \omega = \text{const}$ и медленное сканирование $\gamma = C \sin \omega t$. Опоры вала подвержены воздействию высокочастотной вибрации со стороны основания и совершают быстрые колебания под некоторым углом α к вертикали по гармоническому закону $b \sin pt$ (*b, p* – амплитуда и частота колебаний соответственно).

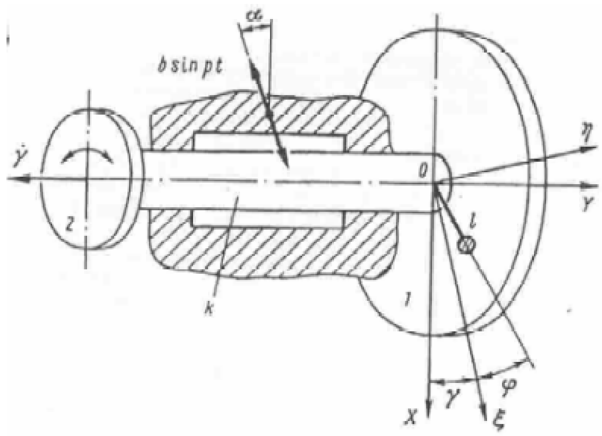

Рис.1. Вращение и сканирование горизонтального вала.

Введем следующие системы координат: неподвижную *XOY* и подвижную *Oξς*, жестко связанную со шкивом. В качестве обобщенной координаты выберем угол закручивания φ в подвижной системе координат.

Кинетическая энергия

$$T = [I(\dot{\gamma} + \dot{\varphi})^2 + mb^2 p^2 \cos^2 pt]/2 - lbm(\dot{\gamma} + \dot{\varphi})\sin(\varphi + \gamma - \alpha)\cos pt$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = k\rho^2/2 + mgl[1 - \cos(\gamma + \varphi)] + mgb \sin pt \cos\alpha$$

Диссипативная функция вязкого внешнего трения

$$\Phi = \beta_0(\dot{\gamma} + \dot{\varphi})^2/2$$

Уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \ddot{\gamma} + \omega_1^{\,2}\varphi + P\sin(\varphi+\gamma) + \frac{mlbp^2}{I}\sin pt\sin(\varphi+\gamma-\alpha) + \beta(\dot{\varphi}+\dot{\gamma}) = 0 \qquad (1)$$

где $\omega_1 = \sqrt{k/I}$ - собственная частота крутильных колебаний вала, I- момент инерции, m -масса, l - эксцентриситет диска, $P_1 = mgl/I$, $\beta = \beta_0/I$ - приведенный коэффициент вязкого трения.

В дальнейшем будем считать, что период изменения угла соизмерим с периодом колебаний вала, то есть $T_\gamma \geq T$, $T = 2\pi/\omega_1$.

Поскольку частота внешней вибрации $p \gg \omega_1$ и, следовательно, $p \gg 1/T_\gamma$, то задача относится к распространенному классу задач вибрационной механики. Ее решение будем искать в виде суммы медленной и быстро осциллирующей составляющих [1,2]

$$\varphi'(t) = \varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t)$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ меняются с характерными временами $T = 2\pi/\omega_1$ и $T_p = 2\pi/p$, а $\mu = \omega_1/p \ll 1$. Такой вид решения физически оправдан, поскольку инерционный осциллятор должен слабо откликаться на быстрые внешние пульсации. Подставив это решение в (1) и усреднив за период $T_p = 2\pi/p$, разделим быстрые и медленные переменные. В результате получим:

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\gamma} + \omega_1^{\,2}\varphi_1 + P\sin(\varphi_1+\gamma) + <\mu mbl^2p^2\varphi_2\cos(\varphi_1+\gamma-\alpha)\sin pt/I> + \beta(\dot{\varphi}_1+\gamma) = 0$$
$$\mu\ddot{\varphi}_2 + \mu\varphi_2(\omega_1^{\,2} + P\cos(\varphi_1+\gamma)) + mbl^2p^2\sin(\varphi_1+\gamma-\alpha)\sin pt/I + \mu\beta\dot{\varphi}_2 = 0$$

где <…> означает усреднение за период $T_p = 2\pi/p$.

В последнем уравнении слагаемое $\mu\varphi_2(\omega_1^{\,2} + P\cos(\varphi_1+\gamma))$ мало по сравнению с остальными членами. Определяя отсюда φ_2, найдем:

$$\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\gamma}(t) + \omega_1^{\,2}\varphi_1 + P_1\sin(\varphi_1+\gamma(t)) + P_2\sin^2(\varphi_1+\gamma(t)-\alpha) + \beta(\dot{\varphi}_1+\dot{\gamma}) = 0$$
$$P_2 = (mbpl)^2/4I^2(1+(\beta/p)^2) \qquad (2)$$

Таким образом, действие высокочастотной вибрации приводит к появлению в уравнении для медленных движений вибрационного момента, пропорционального амплитуде быстрых пульсаций. Его величина зависит от закона изменения угла $\gamma(t)$. Поэтому в уравнении (2) вибрационный момент не является постоянным, как в [1,2], а является нелинейным параметрическим возбуждением, вызывающим дополнительные нерезонансные состояния. Исследуем теперь динамику вала с помощью уравнения (2) для двух режимов движения.

Режим равномерного вращения $\gamma = \omega t$, $\omega = \mathrm{const}$.

В этом случае уравнение (2) имеет вид:

$$\ddot{\varphi}_1 + \sigma^2\varphi_1 + P'\varepsilon\sin(\varphi_1+\tau) + P_1\sin 2(\varphi_1+\tau-\alpha) + \varepsilon\beta(\dot{\varphi}_1+\omega) = 0$$
$$\varepsilon = ml^2/I,\ \sigma^2 = \omega^2{}_1/\omega^2 \qquad (3)$$

Решение ищем методом малого параметра [3]

$$\varphi_1 = -\varepsilon[c_1 + \frac{P_1'}{\sigma^2-1}\sin\tau + \frac{P_2'}{\sigma^2-4}\sin 2(\tau-\alpha)] + o(\varepsilon^2) \qquad (4)$$
$$c_1 = \beta_1/\sigma^2.$$

Из (4) следует, что вал закручен на малый постоянный угол c_1 за счет внешнего трения и относительно этого положения происходят незатухающие крутильные колебания с периодом $T = 2\pi/\omega$. На рис. 2 представлен график изменения угла φ и положения дисбаланса

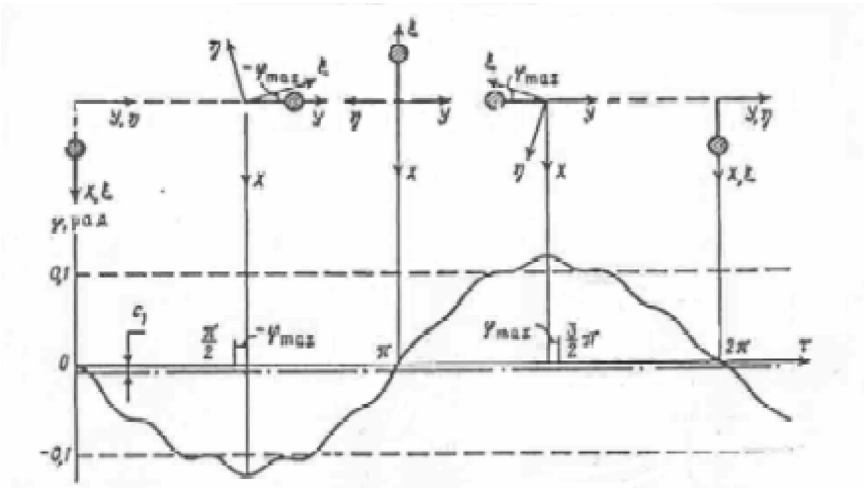

Рис.2. Нерезонансные крутильные колебания вала.

Для вертикального вала $P' = 0$ и возникнет только двойная гармоника за счет высокочастотной вибрации опор. Для горизонтального вала основной вклад вносит влияние веса. Из (4) также следует, что вблизи значений $\sigma = 1, 2 \ldots n$ возникают резонансные области.

Из (4) видно, что амплитуда колебаний А является суммарной амплитудой двух гармоник

$$A = \frac{P_1'}{\sigma^2-1}\sin\tau + \frac{P_2'}{\sigma^2-4}\sin 2(\tau-\alpha),$$

первая из которых определяется весом, а вторая высокочастотной вибрацией опор. Таким образом, вибрация увеличивает амплитуды нерезонансных колебаний. Это увеличение зависит от угла α действия силы: максимальное увеличение происходит при $\alpha = \pi/4$, минимальное - при $\alpha = 0,\ \pi/2$ (то есть при горизонтальной и вертикальной вибрации опор).

В резонансных областях влияние вибрации оказывается противоположным. В случае резонансных колебаний наибольшее влияние вибрация оказывает в области супергармонического резонанса $\sigma = \omega_1 / \omega = 2$. Найдем решение в этой резонансной области методом малого параметра. Для этого введем малую расстройку, полагая $\varepsilon a = \sigma^2 - 4$, и примем в качестве порождающего решения

$$\varphi_0 = \varepsilon P_1' \sin\tau + N_0 \sin 2\tau + M_0 \cos 2\tau$$

Получим, что амплитуда колебаний равна:

$$A = -q \pm (3/8\, A^2 d + \delta)\sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{4\beta_1^2}{(3/8\, A^2 d + \delta)^2}}, \qquad q = \varepsilon P_1'/6 .$$

- для вертикальной вибрации $d = 4P_2' - q,\ \delta = q - P_2'$
- для горизонтальной вибрации $d = -4P_2' - q,\ \delta = q + P_2'$

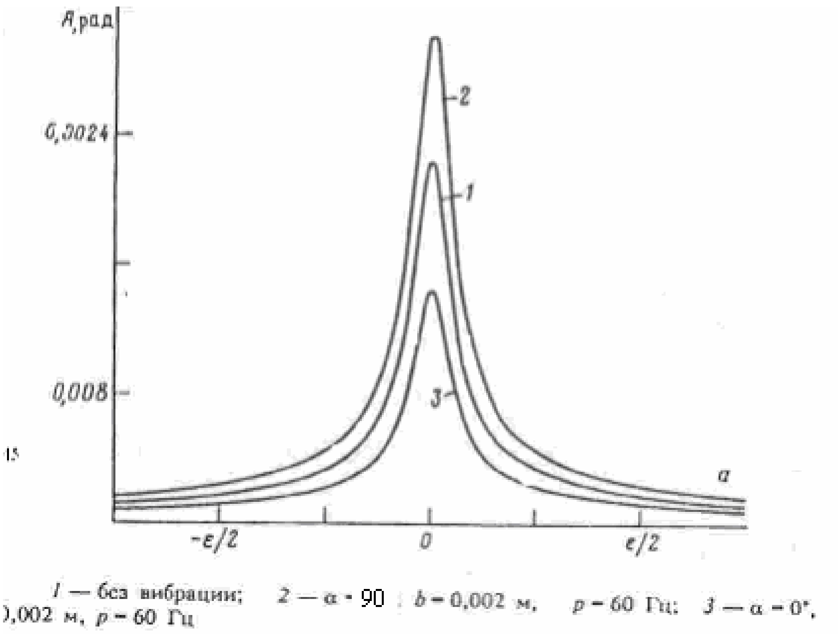

Рис.3. Изменение амплитуды колебаний в зависимости от вибрации в опорах.

Таким образом, минимальные амплитуды возникают при вертикальной вибрации, и этот факт может быть использован для снижения амплитуд резонансных колебаний.

Режим сканирования $\gamma = C \sin \omega t$.

Уравнение движения в этом случае

$$\ddot{\varphi} + \sigma^2 \varphi = C \sin \omega t - \varepsilon P \sin(\varphi + C \sin \omega t) - \varepsilon P_1 \sin 2(\varphi + C \sin \omega t - \alpha) - \varepsilon\beta(\dot{\varphi} + C\omega \cos \omega t)$$

Его решение в нерезонансной области, полученное методом малого параметра имеет вид:

$$\varphi = c\sin\omega t + \varepsilon\Delta + \varepsilon\frac{Pf_1(t) + P_1 f_2(t)}{(\sigma^2 - 1)(\sigma^2 - 9)}, \qquad (5)$$
$$\Delta = \varepsilon P_1(I_0 - 4cI_1 - c^2 I_0 + c^3 I_1)\sin 2\alpha$$

Из (5) следует, что под действием высокочастотной вибрации возникает постоянный увод Δ положения динамического равновесия относительно вертикали (аналогия с маятником Капицы)[4].

Величина увода зависит от направления вибрации:

- при $\alpha = \pm\pi/4$ увод максимален;

-при $\alpha = 0, \pi/2$ (горизонтальная и вертикальная вибрация) – увод отсутствует.

При этом вертикальная вибрация увеличивает амплитуды колебаний, а горизонтальная уменьшает

Резонансный случай. Решение для амплитуды колебаний имеет вид

$$A = e \pm \left(\frac{3}{4}gA^2 + \delta\right)\sqrt{\frac{1}{A^2} - \frac{n^2\beta^2}{\left(\frac{1}{4}gA^2 + \delta^2\right)}}$$

При приближении к резонансным зонам величина увода возрастает. При увеличении угла сканирования амплитуда колебаний возрастает (рис.4).

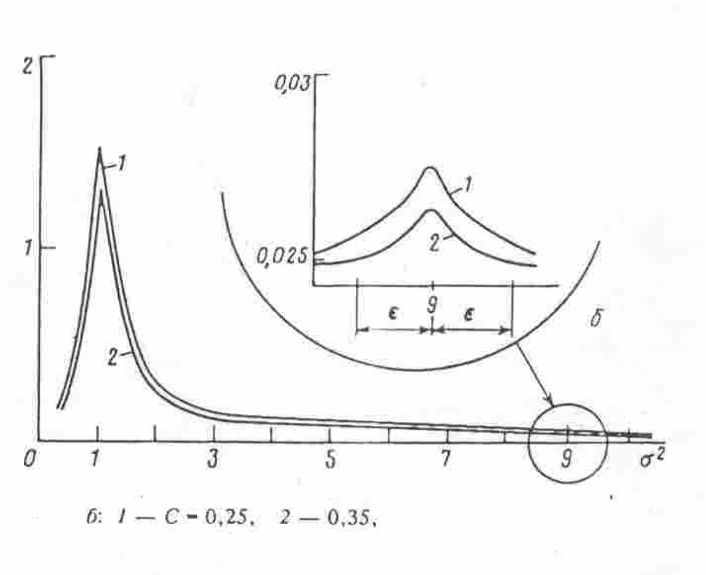

Рис.4. Изменение амплитуды колебаний в зависимости от угла сканирования

Литература

1. Рагульскис К.М. Механизмы на вибрирующем основании. Каунас: Изд.АН

Лит.ССР, 1963, 246 с.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.:Наука, 1983, 432 с.
3. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.:Гостехиздат,1956.
4. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом.//УФН, 1951, т. 44, С. 7-20

Поступила: 08.05.09.