

УДК 621.01: 534.1

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ И КРИТЕРИИ ВИБРОАКТИВНОСТИ ЦИКЛОВЫХ МЕХАНИЗМОВ С ЗАЗОРАМИ

**И. И. ВУЛЬФСОН**

**1. Предварительные замечания.** Зазор, как правило, является сопутствующим фактором любой кинематической пары, осуществляющей подвижное соединение звеньев механизма. По существу, кинематические пары следует рассматривать как неударяющие связи, к которым обычно относят подвижные соединения звеньев с односторонним контактом. Действительно, хотя кинематическая пара в целом реализует двухстороннюю связь, эту функцию при зазорах она выполняет лишь частично, так как при переключке в зазоре имеют место локальные разрывы кинематической цепи, характерные для систем с неударяющими связями. Такие связи можно характеризовать как псевдоударяющие.

По воздействию на колебательную систему можно условно выделить три характерных случая проявления зазора, каждому из которых отвечает соответствующая область изменения параметров и внешних возмущений. В *первом случае* зазор проявляет себя как нелинейный элемент, существенно влияющий на спектр частот свободных колебаний. Во *втором случае* влияние зазора в основном проявляется как импульсное возмущение на ограниченном временном интервале кинематического цикла при отсутствии сколько-нибудь заметного искажения частотного спектра исходной линейной системы. При этом однако сохраняется возможность многократных соударений, приводящих к виброударным режимам, при которых динамический эффект от зазоров приближается к первому случаю. Наконец, в *третьем случае* определяющую роль играют «параметрические импульсы», вызванные достаточно резким изменением спектра собственных частот.

Проблема рационального динамического синтеза колебательных систем с учетом зазоров особо остро встает при проектировании высокоскоростных цикловых механизмов с нелинейной функцией положения, поскольку в этом классе механизмов зазоры могут привести к большим искажениям заданного программного движения рабочих органов, а также к повышению шума и виброактивности привода. Нередко именно величина зазоров в конечном итоге лимитирует производительность и эксплуатационные характеристики многих современных технологических машин, что заставляет существенно ужесточить точностные требования при их изготовлении.

Влияние зазоров на динамику машин исследовано в многих работах, обзор которых не вмещается в рамки данной статьи. Подробный обзор работ последних десятилетий по рассматриваемой проблеме приведены в монографиях [1,2], в статьях [3–5] и др.. В данной статье в развитие предыдущих работ автора излагаются некоторые новые аспекты рассматриваемой проблемы.

**2. Математическая модель зазора.** Восстанавливающая сила описывается следующим образом:

$$F = c(q - \Delta \operatorname{sign} q) u(|q| - \Delta), \quad (1)$$

где  $q$  – обобщенная координата;  $\Delta = 0,5s$ ;  $s$  – величина зазора;  $u$  – единичная функция ( $u = 0$  при  $|q| < \Delta$ ;  $u = 1$  при  $|q| \geq \Delta$ ).

Скачкообразное изменение единичной функции соответствует моменту перестройки структуры колебательной системы. С этими моментами переключения иногда связаны определенные трудности при их реализации. Так, например, при использовании численных методов могут появиться особые «скользящие» режимы с большим числом переключений на ограниченном интервале времени. При аналитических исследованиях ступенчатый характер зависимостей может осложнить анализ и оптимизационный синтез из-за нарушения условий дифференцируемости в окрестности указанных зон. Для исключения этого недостатка при сохранении нелинейных свойств функции  $F(q)$  используют аппроксимацию ступенчатых функций непрерывными функциями

$$u(x) = \lim_{L_0 \rightarrow \infty} [0,5 + \pi^{-1} \operatorname{arctg}(L_0 x / \Delta)]_* \approx 0,5 + \pi^{-1} \operatorname{arctg}(Lx / \Delta), \quad (2)$$

где  $x = |q| - \Delta$ ;  $L \gg 1$  (обычно число  $L$  должно на несколько порядков превышать отношение  $x / \Delta$ ).

При смене знака  $x$  функция  $u(x)$  согласно (2) достаточно быстро изменяется от 0 до 1, сохраняя при этом непрерывный характер. Подобную процедуру иногда называют гладкой аппроксимацией. Как показывает эксперимент, гладкая аппроксимация зазора нередко оказывается даже более точной, чем исходная ступенчатая функция, что по-видимому связано с уменьшением контактной жесткости элементов кинематической пары в окрестности моментов переключений, наличием слоя смазки и другими сглаживающими факторами.

**3. Возбуждение колебаний при ударном характере взаимодействия элементов кинематических пар.** Особенности проявления зазоров при колебаниях проиллюстрируем на примере циклового механизма, динамическая модель которого приведена на рис.1. Помимо традиционных элементов на модели показан элемент  $s$ ,

отвечающий зазору. Этой модели при учете (1), (2) соответствует следующее дифференциальное уравнение:

$$\ddot{q} + k_0^2(2\delta k_0^{-1}\dot{q} + q)\Psi(q) = w(t) \quad (3)$$

Здесь принято, что абсолютная координата выходного звена представлена как  $y(\varphi) = \Pi(\varphi) + q \pm \Delta$ , где  $\Pi(\varphi)$  – функция положения механизма,  $\varphi = \omega t$ ,  $\omega$  – угловая скорость входного звена,  $q$  – обобщенная координата;  $k_0 = \sqrt{c/m}$  – собственная частота при отсутствии зазора;  $\Psi(q) = F(q)/m$  (см. формулу (1)).

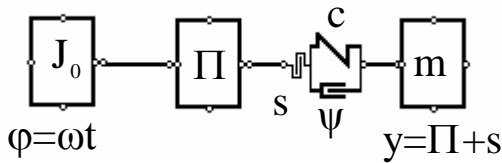


Рис.1

Пусть  $w(t) = w_0 \cos \omega t$ , где  $w_0 = \Pi''_{\max} \omega^2$ , что отвечает гармоническому закону движения выходного звена без учета колебаний. В частности, такая функция положения с достаточной

точностью отвечает перемещению ползуна кривошипно-ползунного механизма  $\Pi \approx r_0(1 - \cos \varphi)$ .

Для того чтобы придать результатам анализа более общий вид, перейдем к новой переменной, в качестве которой примем «безразмерное время»  $\varphi = \omega t$ . Тогда уравнение (3) примет вид

$$\bar{q}'' + N^2(2\delta N\bar{q}' + \bar{q})\Psi(\bar{q}) = \cos \varphi, \quad (4)$$

где  $N = k_0/\omega$ ,  $\delta \approx \psi/(4\pi)$ ; штрих отвечает производной по  $\varphi$ ;  $\bar{q} = q/r_0$  – безразмерная координата.

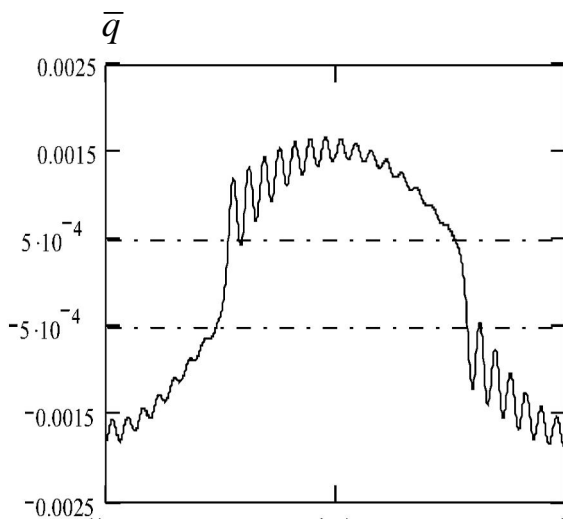


Рис.2

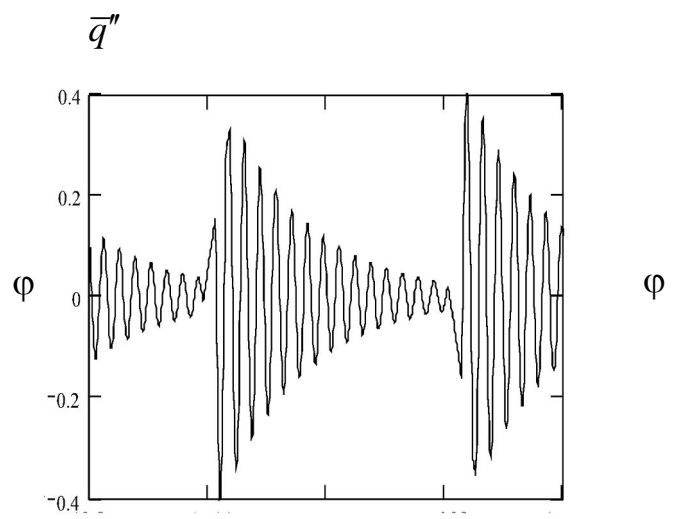


Рис.3

На рис.2 приведен график  $\bar{q}(\varphi)$ , полученный решением уравнения (4) численным методом при  $N = 30, \delta = 0,03, \bar{s} = s/r_0 = 10^{-3}$ . Таким образом, перекладка в зазоре происходит при  $-5 \cdot 10^{-4} < \bar{q} < 5 \cdot 10^{-4}$  (границы этого интервала показаны на графике штрих пунктирными линиями). На графике четко видно импульсное возбуждение колебаний после каждого перехода через зазор. Поскольку на рассматриваемом режиме после выборки зазора почти отсутствуют повторные соударения, частота колебаний равна  $k_0$ . Следовательно, в данном случае зазор практически не влияет на спектр собственных частот. Еще более наглядно это видно на графике функции  $\bar{q}''(\varphi)$ , которой пропорциональны силы инерции, возникающие при колебаниях (рис.3).

Совсем иная картина наблюдается при возникновении виброударных режимов. В качестве примера на рис.4 показан график  $\bar{q}(\varphi)$  при сохранении принятых выше исходных данных, но при полной динамической разгрузке и одиночном импульсном возбуждении. В данном режиме частота колебаний  $k$  существенно ниже значения  $k_0$ . Для оценки частоты  $k$  в подобных случаях нередко используется метод гармонической линеаризации, согласно которому

$$k^2(A) \approx k_0^2 [1 - 4\Delta / (\pi A)], \quad (5)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний.

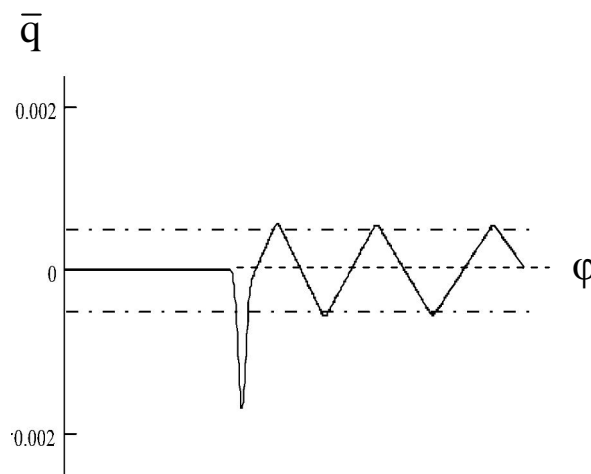


Рис.4

Следует, однако, отметить, что эта формула (5) может дать большую погрешность. Это связано с существенным отличием виброударного режима от гармонических колебаний. В подобных случаях более эффективным приемом оценки собственных частот является гармоническая линеаризация по силе, поскольку восстанавливающая сила

достаточно точно описывается функцией вида  $F = F_0 + F_1 \sin \omega t$ . Если воспользоваться коэффициентами гармонической линеаризации по силе [6], то последовательное соединение элемента  $c_0$  с зазором  $s = 2\Delta$  эквивалентно упругому элементу, податливость которого равна  $e_* = c_*^{-1} = e_0 + e_\Delta$ , где

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= c_0^{-1}; \\ e_\Delta &= \frac{4\Delta}{\pi F_1} \sqrt{1 - \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^2} \text{ при } F_1 \geq F_0; \\ e_\Delta &= 0 \quad \text{при } F_1 \leq F_0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Впрочем, возможность возникновения подобных виброударных режимов должна быть исключена еще на стадии создания машины. В связи с рассмотренным режимом при наличии зазоров представляет интерес отрицательный эффект от полной динамической разгрузки (см. ниже) [4].

**4. Некоторые аналитические оценки и динамические критерии.** Согласно дифференциальному уравнению (3) будем различать две фазы движения. На *первой фазе* зазор выбран, следовательно, с точностью до постоянной  $y = \Pi(\varphi) + q$ ; на *второй фазе* – при переходе через зазор, выходное звено находится в «свободном полете», что наглядно видно на рис.2. Определим уровень дополнительных колебаний, возбуждаемых при восстановлении кинематического контакта. При этом примем, что угол поворота входного звена  $\Delta\varphi_1 = \omega\Delta t_1$ , соответствующий зазору, мал. Это позволяет в первом приближении считать, что движение на данной фазе происходит с постоянной скоростью. Тогда

$$\Pi(\varphi^* + \Delta\varphi_1) + s = \Pi(\varphi^*) + \Pi'(\varphi^*)\Delta\varphi_1, \quad (7)$$

где  $\varphi^*$  – угол поворота входного звена при смене знака реакции в кинематической паре;  $s$  – величина зазора.

Далее, представляя функцию  $\Pi(\varphi^* + \Delta\varphi_1)$  в окрестности  $\varphi^*$  в виде усеченного ряда Тейлора, на основании (7) имеем

$$\frac{1}{6}\Pi_*'''\Delta\varphi_1^3 + \frac{1}{2}\Pi_*''\Delta\varphi_1^2 + s = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\Pi_*'', \Pi_*'''$  отвечают аргументу  $\varphi^*$ .

В современных высокоскоростных цикловых механизмах динамическая нагрузка, вызванная кинематическим возбуждением, обычно

значительно превосходит силы сопротивления, поэтому переход через зазор практически происходит при  $\Pi_*'' = 0$ . Тогда согласно (8)

$$\Delta\varphi_1 = \sqrt[3]{6s/|\Pi_*''|}. \quad (9)$$

Здесь принято во внимание, что  $\Pi_*''' < 0$ .

При восстановлении кинематического контакта имеет место скачок первой передаточной функции  $\Delta\Pi'$ , который при учете (7) определяется следующим образом [4],[7]:

$$\Delta\Pi' = \sqrt[3]{4,5s^2|\Pi_*''|}. \quad (10)$$

При этом имеет место жесткий удар. Аналогичным образом могут быть учтены возмущения, связанные со скачками  $\Delta\Pi''$  и  $\Delta\Pi'''$ . Введем в рассмотрение параметр  $\xi = |\Delta y''|_{\max} / |\Pi_*''|_{\max}$ , равный отношению экстремума дополнительного ускорения (после выборки зазора) к экстремуму идеального ускорения. При одиночном ударе получаем

$$\xi = \Pi_*''' \sqrt{(4,5)^{2/3} \beta_1^4 N^2 + N^{-2}}, \quad (11)$$

где  $\beta_1 = \sqrt[3]{s/|\Pi_*''|}$ .

На рис.5 представлено семейство кривых  $\xi(N, \beta_1)$  при  $\beta_1 = 10^{-3}$  (кривая 1),  $\beta_1 = 5 \cdot 10^{-4}$  (кривая 2),  $\beta_1 = 10^{-4}$  (кривая 3).

Параметр  $\beta_1$  играет роль важного динамического критерия. На основании формулы (11) могут быть определены параметры системы, удовлетворяющие требованию  $\xi \leq \xi_*$ , где  $\xi_*$  – допускаемое значение уровня дополнительных ускорений, вызванных зазором. (Обычно  $\xi_* < 0,1 \div 0,2$ ).

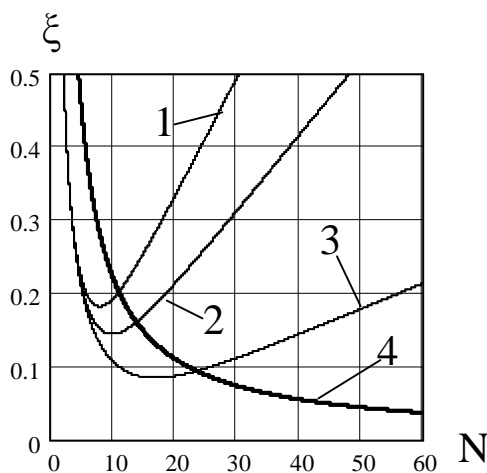


Рис.5

Для исключения возможности возникновения виброударных режимов при выборке зазора очень важно устранение повторных соударений. График  $\bar{q}(\varphi)$  (см. рис.2) наглядно показывает, что повторные соударения могут возникнуть с некоторым фазовым сдвигом относительно угла  $\varphi^*$ , соответствующего разрыву

кинематической связи при «входе» в зазор  $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$ . Значение  $\Delta\varphi_1$  определяется формулой (9), а  $\Delta\varphi_2 \approx \Delta t_2 / \omega = \alpha N^{-1}$ , где интервал времени  $\Delta t_2$  соответствует первому минимуму функции  $\bar{q}$  после выборки зазора. Можно показать, что  $\alpha \approx 4,45 \div 6,28$ .

На основании (9)–(11) можно показать, что в первом приближении должно удовлетворяться условие.

$$\beta_2 = \beta_1 N^{-1} < 0,3 \exp(\delta\alpha) \left[ 1 + \sqrt{1 + 29,4 \exp(-\delta\alpha)} \right]. \quad (12)$$

В формуле (12) учтено демпфирование колебаний на малом отрезке времени  $\Delta t_2$ . Однако, как показывает анализ,  $\exp(\delta\alpha) \approx 1$ . Тогда  $\beta_2 < \beta_2^*$ , где  $\beta_2^* \approx 1,9 \div 2,2$ . На рис.5 этому условию отвечают точки, расположенные ниже кривой 4.

На рис.6 приведены графики нормированных значений коэффициента возрастания максимальных ускорений  $\tilde{\xi}$  при увеличении относительной величины зазора  $\tilde{\delta}$  в 50 раз. При этом штриховая линия соответствует результатам расчета по формуле (11), а остальные две кривых результатам компьютерного моделирования. Сопоставление этих результатов подтверждает эффективность предложенных критериальных оценок. Однако при определенных условиях в частотном спектре доминируют низкие частоты, что требует учета упругодиссипативных свойств привода машины на базе более совершенных динамических моделей [7].

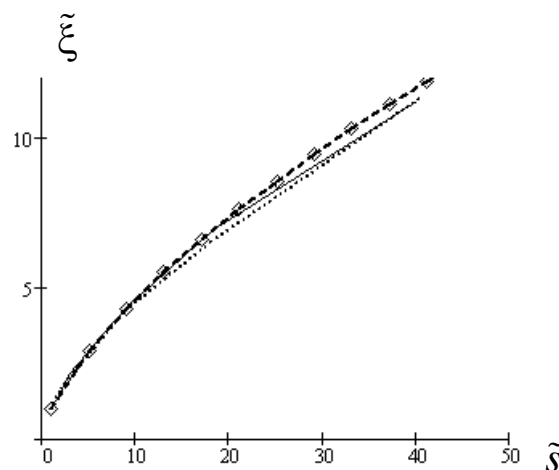


Рис.6

Одним из способов снижения динамических нагрузок цикловых приводных механизмов, осуществляющих периодическое движение исполнительных органов машин, является динамическая разгрузка с помощью упругих элементов, установленных между выходным звеном и корпусом машины. Оптимизация упругих характеристик разгрузителя для абсолютно жесткого механизма достигается минимизацией функционала [7].

$$K_0 = \min \int_0^{2\pi} (Q + U)^2 |d\Pi/d\varphi| d\varphi, \quad (13)$$

где  $\varphi$  – угол поворота главного вала;  $Q$  – обобщенная сила (до установки разгрузателя);  $U(u_1, \dots, u_n)$  – управляющее воздействие, осуществляемое разгрузателем;  $u_j$  – параметры разгрузателя;  $\Pi(\varphi)$  – функция положения механизма.

Наиболее простое конструктивное решение динамического разгрузателя представляет собой упругий элемент  $c_0$ , установленный между выходным звеном механизма и корпусом. Пусть  $y_0$  – величина предварительной деформации упругого элемента разгрузателя,  $F(\varphi)$  – технологическая сила. Тогда функция  $w(\varphi)$ , пропорциональная обобщенной силе, может быть представлена в безразмерном виде как

$$w(\varphi) = p_0^2 \cos \varphi (\varepsilon + 1 + 0.25 \cos \varphi) + f(\varphi), \quad (14)$$

где  $p_0^2 = c_0 / (m\omega^2 r)$ ,  $\varepsilon = y_0 / r$ ,  $f(\varphi) = F(\varphi) / (m\omega^2 r)$ ,

Оптимизационный динамический синтез разгрузателя является многокритериальной задачей, в связи с чем на стадии аналитического прогноза сначала исключим влияние соударений в зазорах ( $\Delta = 0$ ). Тогда согласно (3),(4)

$$|\bar{q}|_{\max} \leq \left[ (\varepsilon + 1)p_0^2 + |1 - p_0^2| / \sqrt{(1 - p_0^2)^2 + 9^2 / (\pi p)^2} \right] p^{-2}.$$

На уровне кинетостатического анализа при оговоренной выше малости ряда составляющих приложенный к главному валу безразмерный момент без учета технологической нагрузки согласно (4),(5) определяется следующим образом:

$$M(\varphi) = - \left[ (1 - p_0^2) \cos \varphi - (1 + \varepsilon) p_0^2 \right] \sin \varphi. \quad (15)$$

Далее в качестве минимизируемого функционала примем

$$\Psi_0 = \int_0^{2\pi} M^2 d\varphi.$$

(16)

Условие  $\partial \Psi_0 / \partial p_0 = 0$  при учете (15),(16) отвечает следующей зависимости:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = 0,5 \sqrt{(1 - p_0^2) / p_0^2} - 1.$$

(17)

Таким образом, оптимальная величина предварительной деформации упругого элемента разгрузателя  $y_0^* = \varepsilon_1 r$  зависит от его коэффициента жесткости. При  $p_0^2 = 1$  имеем,  $\varepsilon_1 = -1$ , что при отсутствии других



ограничений (см. ниже) соответствует оптимуму. Действительно, в этом случае согласно (5)  $M(\varphi) \equiv 0$ .

Как уже отмечалось, полная разгрузка, при которой  $M(\varphi) \equiv 0$ , приводит к виброударным режимам, возникающим при многократной перекладке в зазорах. В частности, было установлено, что значение  $p = k/\omega$  не должно превышать  $30 \div 35$ .

Для сопоставления колебательных режимов при учете зазоров, а также для выбора оптимальных параметров разгрузателя необходимы определенные интегральные критерии. В дополнение к приведенным выше критериям предложены критерии, учитывающие влияние разгрузателя на уровень возбуждаемых колебаний.

1) критерий, характеризующий среднеквадратичное значение динамической составляющей реакции:

$$\Psi_1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\int_{\pi/2}^{\pi} R^2(\varphi) d\varphi},$$

где  $R(\varphi) = \bar{q}''(\varphi) - w(\varphi)$ . (Здесь и ниже усреднение произведено на участке выбега прямого хода).

2) критерий, характеризующий среднеквадратичное значение момента, передаваемого на главный вал машины

$$\Psi_2 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\int_{\pi/2}^{\pi} R^2(\varphi) \sin^2 \varphi d\varphi},$$

3) критерий, характеризующий среднеквадратичное значение дополнительных ускорений, вызванных колебаниями

$$\Psi_3 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\int_{\pi/2}^{\pi} (\bar{q}''(\varphi))^2 d\varphi},$$

4) критерий, характеризующий относительную суммарную длительность участков разрыва кинематического контакта из-за зазоров.

$$\Psi_4 = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} u(\varphi) d\varphi.$$

Для четырех характерных режимов результаты анализа приведены в таблице. При этом для всех иллюстрируемых ниже режимов были приняты следующие безразмерные исходные данные:  $\Delta_1 = 10^{-3}$ ,  $p = 30$ ,  $\vartheta = 0,2$ .

Режим 1 отвечает отсутствию разгрузателя. При этом имеют место разрывы кинематического контакта в зазоре ( $\Psi_4 \neq 0$ ) и существенные динамические ошибки исходного закона движения.

Режим 2 отвечает установке разгрузателя с оптимальной настройкой при отсутствии зазоров. В этом случае также имеют место соударения в зазорах.

Режим 3 отвечает установке разгрузателя при оптимальной частотной настройке и учете зазоров. При этом при приемлемых значениях  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  весьма существенным с точки зрения шумовых характеристик и износа является отсутствие перекладки в зазорах ( $\Psi_4 = 0$ ), в результате

чего значительно уменьшились дополнительные нагрузки, вызванные колебаниями.

Таблица

№	$p_0^2$	$\varepsilon$	$\Psi_1$	$\Psi_2$	$\Psi_3$	$\Psi_4$
1	0	0	0,491	0,249	0,129	0,088
2	1	-1	0,231	0,139	0,13	0,626
3	0,86	-0,7	0,3	0,201	0,035	0

5) критерий динамической устойчивости на конечном отрезке времени.

Как показано в [7], в колебательных системах с цикловыми механизмами имеет место медленно изменяющийся спектр «собственных» частот, что может привести к нарушению «традиционного» затухающего характера свободных колебаний. При этом на определенном участке кинематического цикла амплитуда свободных колебаний возрастает. Устранение этого нежелательного эффекта достигается при соблюдении следующего критериального условия:

$$\vartheta_r > \vartheta_r^* = \pi \left| \bar{p}'_r \right| / \bar{p}_r^2,$$

где  $\vartheta_r$ ,  $\vartheta_r^*$  – приведенный к форме  $r$  логарифмический декремент и его критическое значение.

б) энергетический критерий.

Используя (6), произведем сопоставление максимального значения энергии  $E_*$  при  $\Delta \neq 0$  и  $E_0$  при  $\Delta = 0$ . Поскольку  $E_* = 0,5e_0(F_0 + F_1)^2$ , получаем, что  $E_*/E_0 = 1 + K_\Delta$ , где

$$K_\Delta = \frac{4c_0\Delta}{\pi F_1} \sqrt{1 - \left(\frac{F_0}{F_1}\right)^2} \quad (F_1 \geq F_0).$$

Параметр  $K_\Delta$  может служить эффективным энергетическим критерием для оценки динамического эффекта от зазора. Этот критерий растет при увеличении  $\Delta$  и коэффициента жесткости  $c_0$  и убывает с увеличением  $F_1$  и  $F_0$ . При  $F_1 \leq F_0$  имеем  $K_\Delta = 0$ , что соответствует полностью выбранному зазору на протяжении всего цикла. Анализ результатов инженерных расчетов и экспериментальных исследований свидетельствует о том, что для ограничения уровня вибраций, вызванных зазорами, следует выполнить условие  $K_\Delta \leq 0,2 \div 0,4$ .

Рассматриваемая задача является многокритериальной. Иногда в подобных случаях, используя весовые коэффициенты, формируется обобщенный критерий оптимальности. При этом, однако, трудно избежать субъективности в определении степени важности каждого из учитываемых критериев.

### Список литературы

1. Dresig H., Vulfson J.I. Dynamik der Mechanismen. – Wien, New-York: Springer-Verlag, 1990. 328 S.
2. Luder R. Zur Synthese periodischer Bewegungsgesetze von Mechanismen unter Berücksichtigung von Elastizität und Spiel. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 11 Nr. 225. Dusseldorf: VDI-Verlag, 1995.
3. Вульфсон И.И. Устранение повторных соударений при перекладке в зазорах цикловых механизмов. – Изв. вузов. Машиностроение. №12, 1989. С.62–66.
4. Вульфсон И.И. Оптимизация параметров колебательных систем цикловых механизмов с учетом зазоров. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. №3. С. 9 – 16.
5. Dresig H., Vulfson I.I. Kriterien zur Bewertung des dynamischen Einflusses von Spiel in zyklischen Mechanismen // Konstruktion 45 (1993). S.351– 357.
6. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. –М.: Наука, 1978.– 352с.

7. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. 309с.

*Работа выполнена при поддержке ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 г.)».*

*Поступила: 11 августа 2007 г.*