УДК 519.6

МЕТОДЫ СВЕДЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНЫХ СИСТЕМ К СОСРЕДОТОЧЕННЫМ

В.Ш. БУРД

Каждую распределенную систему можно рассматривать как сосредоточенную с достаточно большим числом степеней свободы. Например, колеблющуюся струну всегда можно разбить на некоторое число частей (например, n) и считать, что каждая часть совершает колебания как единое целое. Тем самым каждая часть струны рассматривается как колебательная система с одной степенью свободы, а совокупность всех n частей — как связанная колебательная система с n степенями свободы. Если n достаточно велико, то такая модель будет достаточно хорошо описывать колебания струны в области не слишком высоких частот. На этой идее основано применение метода конечных разностей для расчета колебаний в распределенных системах (см. [1]).

Сведение распределенной системы к сосредоточенной модели можно проводить и другим путем. В отношении частотного спектра любая распределенная колебательная система эквивалентна бесконечному набору сосредоточенных колебательных систем с одной степенью свободы, каждая из которых имеет собственную частоту, совпадающую с одной из собственных частот распределенной системы. Если интересоваться только конечным набором собственных частот, то можно найти такую сосредоточенную систему с конечным числом степеней свободы, собственные частоты которой будут близки к соответствующим собственным частотам распределенной системы.

1.Метод Бубнова — Галеркина

1. Метод Бубнова — Галеркина был разработан для решения линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Подробное изложение метода применительно к стационарным и нестационарным линейным уравнениям содержится в [2].

Здесь мы рассмотрим применение метода к нелинейным уравнениям. Пусть нелинейная колебательная система с распределенными параметрами описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \quad (1)$$

Будем считать, что краевые условия заданы на промежутке $0 \le x \le l$.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в форме

$$u(x,t)=V(x,z_1(t),z_2(t),\dots,z_N(t)) \quad (2)$$

где V — заданная функция x и неизвестных функций времени $z_i(t),\quad (i=1,2,\dots,N)$. Предполагается, что функция V удовлетворяет краевым условиям при любых $z_i(t)$. Функции $z_i(t)$ называют галеркинскими координатами.

Подставляя (2) в левую часть уравнение (1), получим некоторую функцию $\Phi\left(x,t,z_1(t),\dots,z_N(t),\frac{dz_1}{dt},\dots,\frac{dz_N}{dt}\right)$, которую будем называть невязкой. Если бы выражение (2) представляло собой точное решение уравнения (1), то невязка была бы равна нулю. Потребуем, чтобы невязка в среднем по длине промежутка $[0,1]$ были бы ортогональна ко всем частным производным функции V по $z_1,z_2,\dots,z_N$. Это требование дает N обыкновенных дифференциальных уравнений для определения галеркинских координат $z_i(t)$:

$$\int_0^l\left(\Phi\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)dx=0,\dots,\int_0^l\left(\Phi\frac{\partial V}{\partial z_N}\right)dx=0 \quad (3)$$

Физический смысл (см. [3]) описанной процедуры состоит в следующем. Задание решения в форме (2) эквивалентно наложению на систему некоторых связей. Требуя равенство нулю работы сил реакции этих связей на любом виртуальном перемещении, получаем уравнения (3).

Если краевые условия линейны, то функцию V можно задать в виде линейной комбинации конечного числа заданных линейно независимых функций координаты x, т.е.

$$u(x,t)=\sum_{r=1}^{N}z_r(t)y_r(x) \quad (4)$$

При задании решения в форме (4) уравнения (3) принимают вид

$$\int_0^l\Phi\, y_1(x)dx=0,\dots,\int_0^l\Phi\, y_N(x)dx=0$$

Функции $y_r(x)$ называются базисными или пробными функциями. Отметим, что при практических вычислениях в сумме (4) берут одно или два слагаемых.

2.Метод взвешенных невязок.

Метод Бубнова — Галеркина входит в более обширный класс методов известных под названием методы взвешенных невязок (см. [4],[5]). Метод взвешенных невязок можно описать следующим образом.

Предположим, что дифференциальное уравнение

$$L(u)=0$$

должно быть решено при начальных условиях $I(u)=0$ и краевых условиях $S(u)=0$. Приближенное решение представляется в виде

$$u_a(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{j=1}^{N} a_j(t)\varphi_j(x)$$

где все $\varphi_j(x)$ - известные функции. Функция $u_0(x,t)$ выбирается так, чтобы начальные и краевые условия удовлетворялись по **возможности точно**. Чтобы получить уравнения для определения функций $a_j(t)$, вычисляют невязку $R(t,x) = L(u_a(x,t))$ и требуют выполнения равенств

$$\int_{\Omega} R(t,x)\, w_l(x)dx = 0, \quad l = 1,2,\ldots,N \quad (5)$$

где Ω - область, в которой ищется решение. Функции $w_l(x)$ называются весовыми или поверочными.

На практике могут быть использованы различные виды систем весовых функций $w_l(x)$, ведущие к разным методам аппроксимации посредством взвешенных невязок. Ниже опишем некоторые из наиболее употребительных выборов таких систем.

Отметим сразу, что метод Бубнова - Галеркина получается, если весовые функции совпадают с базисными.

3.Поточечная коллокация.

Здесь элементы $w_l(x)$ системы весовых функций заданы формулой

$$w_l(x) = \delta(x - x_l)$$

где $\delta(x - x_l)$ — дельта-функция Дирака, по определению обладающая свойствами

$$\delta(x - x_l) = 0, \quad x \neq x_l, \qquad \delta(x - x_l) = \infty, \quad x = x_l, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\,\delta(x - x_l) = G(x_l)$$

Согласно (5), выбор таких весовых функций эквивалентен тому, что невязка полагается равной нулю в ряде заданных точек x_l.

3.1 Коллокация по подобластям. Если весовые функции выбираются по правилу

$$w_l(x) = \begin{cases} 1, & x_l < x < x_{l+1} \\ 0, & x < x_l, x > x_{l+1} \end{cases}$$

то уравнения метода взвешенных невязок (5) равносильны требованию равенства нулю интеграла от погрешности по каждой из N подобластей основной области.

3.2.Метод моментов. В этом случае весовые функции принимают вид

$$w_l(x) = x^l$$

3.3.Метод конечных элементов. Метод конечных элементов вначале возник как вариационный метод. Затем появился галеркинский метод конечных элементов. В методе Бубнова — Галеркина базисными обычно являются тригонометрические функции, которые определены во всей рассматриваемой области. Метод конечных элементов связан со специальным выбором базисных функций. Одномерная область $x_1 \le x \le x_N$ разбивается точками (узлами) $x_2, x_3, \dots$ на ряд подобластей. Приближенное решение ищется в виде

$$u_a(x,t) = \sum_{j=1}^{N} P_j(x)\,\alpha_j(t)$$

где базисные функции $P_j(x)$ представляют собой кусочно-линейные функции (в общем случае кусочно-полиномиальные функции). В литературе по конечным элементам функции $P_j(x)$ часто называют функциями формы или интерполяционными функциями. Эти функции линейно убывают от максимального значения в данном конкретном узле, равного единице, до нуля в двух соседних узлах, и остаются равными нулю в остальной части области. Таким образом, хотя представление (6) имеет глобальный характер, внутри каждого конкретного элемента только две функции формы дают в это представление вклад, отличный от нуля. Если учесть, что в методе Галеркина в качестве весовых функций используются те же функции формы, то при расчете по формуле (5) ненулевые вклады будут давать лишь два соседних элемента.

Литература

1. Годунов С.К., В.С. Рябенький Разностные схемы. М.: Наука. 1977. 440с.
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М: Наука, 1970. 512с.
3. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М: Наука, 1983. 320с.
4. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 320с.
5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352с.

Ярославский государственный университет, Ярославль

Поступила: 7 августа 2007 г.