ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ ГЛОБАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПОЛНЫХ БИФУРКАЦИОННЫХ ГРУПП

М. В. Закржевский

Рижский технический университет, Институт механики, Латвия, Рига

Обсуждается предложенный новый подход глобального бифуркационного анализа существенно нелинейных задач динамики, основанный на идеях так называемого метода полных бифуркационных групп [1]. Этот подход позволяет для нелинейных моделей с конечным числом степеней свободы находить, при изменении параметров системы, новые неизвестные ранее устойчивые режимы, в дополнение к известным, в частности, регулярные и хаотические редкие аттракторы. Полные бифуркационные группы включают все устойчивые и неустойчивые периодические решения и все бифуркации решений этой группы. Важной составляющей в структуре бифуркационной группы являются типовые топологические подгруппы UPI с бесконечным числом неустойчивых решений, образующиеся в результате каскада удвоения периода при изменении параметров системы. Численно-аналитическая реализация метода полных бифуркационных групп позволяет выявлять новые типовые топологические группы и кластеры субгармонических островов. Знание типа и топологии бифуркационных групп позволяет лучше понять природу разнообразных нелинейных эффектов в динамических системах, что имеет важное значение для приложений.

В настоящей статье, в развитие работ автора и его коллег обсуждаются основные идеи метода полных бифуркационных групп и иллюстрируются понятия полных и неполных бифуркационных диаграмм. Рассматривается с новых позиций роль неустойчивых решений (режимов) для задач локального и глобального анализа существенно нелинейных динамических систем. Далее кратко обсуждается роль коэффициентов нелинейности при появлении нелинейных эффектов и рождение хаотических аттракторов и хаотических переходных режимов как результат существования подгрупп UPI с бесконечным числом неустойчивых периодических решений. Проблема топологии типовых бифуркационных групп с редкими аттракторами и хаотические оболочки с редкими аттракторами рассматривается в дальнейшем. В заключение, обсуждается новый взгляд на рождение и природу гомоклинических структур. Приводятся несложные примеры типовых задач нелинейных колебаний и нелинейной динамики, иллюстрирующие основные положения и возможности метода полных бифуркационных групп [1].

Метод полных бифуркационных групп. Полные и неполные бифуркационные диаграммы. Принципиальное отличие полных и неполных бифуркационных диаграмм, на которых изображается зависимость состояния системы (координат неподвижных точек) от параметра, состоит в том, что на неполных диаграммах показываются только найденные устойчивые решения (режимы). Полные бифуркационные диаграммы отражают все стационарные решения при изменении параметра, как устойчивые, так и все неустойчивые. Это позволяет системно находить редкие аттракторы, которые не удается обнаружить без продолжения неустойчивых решений. Иллюстрация анализа вынужденных колебаний для простой несимметричной колебательной системы с кубической нелинейностью с помощью метода полных бифуркационных групп приведена на рис. 1, где построена только одна бифуркационная группа 1Т. Показано, как рождаются в этой системе сложные протуберанцы, редкие аттракторы RA и области UPI с хаотическим поведением. На рис. 2 показаны бифуркационные диаграммы для вынужденных колебаний в диссипативной симметричной системе с пяти-линейной упругой характеристикой [2]. В этой системе также обнаружены редкие аттракторы и подгруппы с UPI.

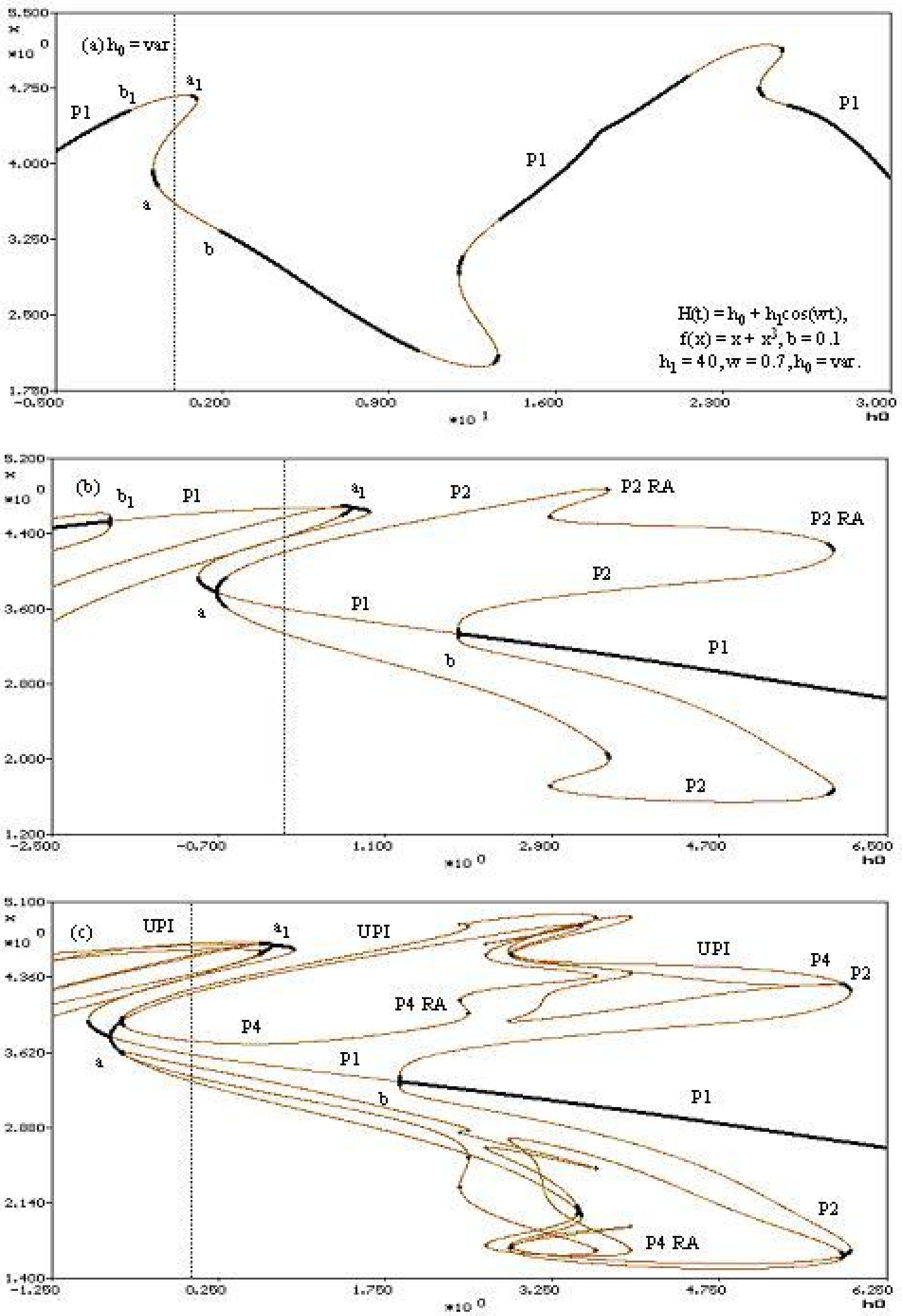

Рис. 1. Полная бифуркационная группа 1Т (h_0 = var.) для несимметричной системы Дуффинга с устойчивыми (тёмные линии) и неустойчивыми (светлые линии) несимметричными решениями: (a) показаны только решения P1; (b) показаны решения P1 и P2; показаны решения P1, P2 и P4. В системе имеется сложный протуберанец режима P1 (a-b),

несколько редких аттракторов и несколько областей с UPI. Параметры системы: $H(wt) = h_0 + h_1\cos(wt)$, $f(x) = x + x^3$, $b = 0.1$, $h_1 = 40$, $w = 0.7$

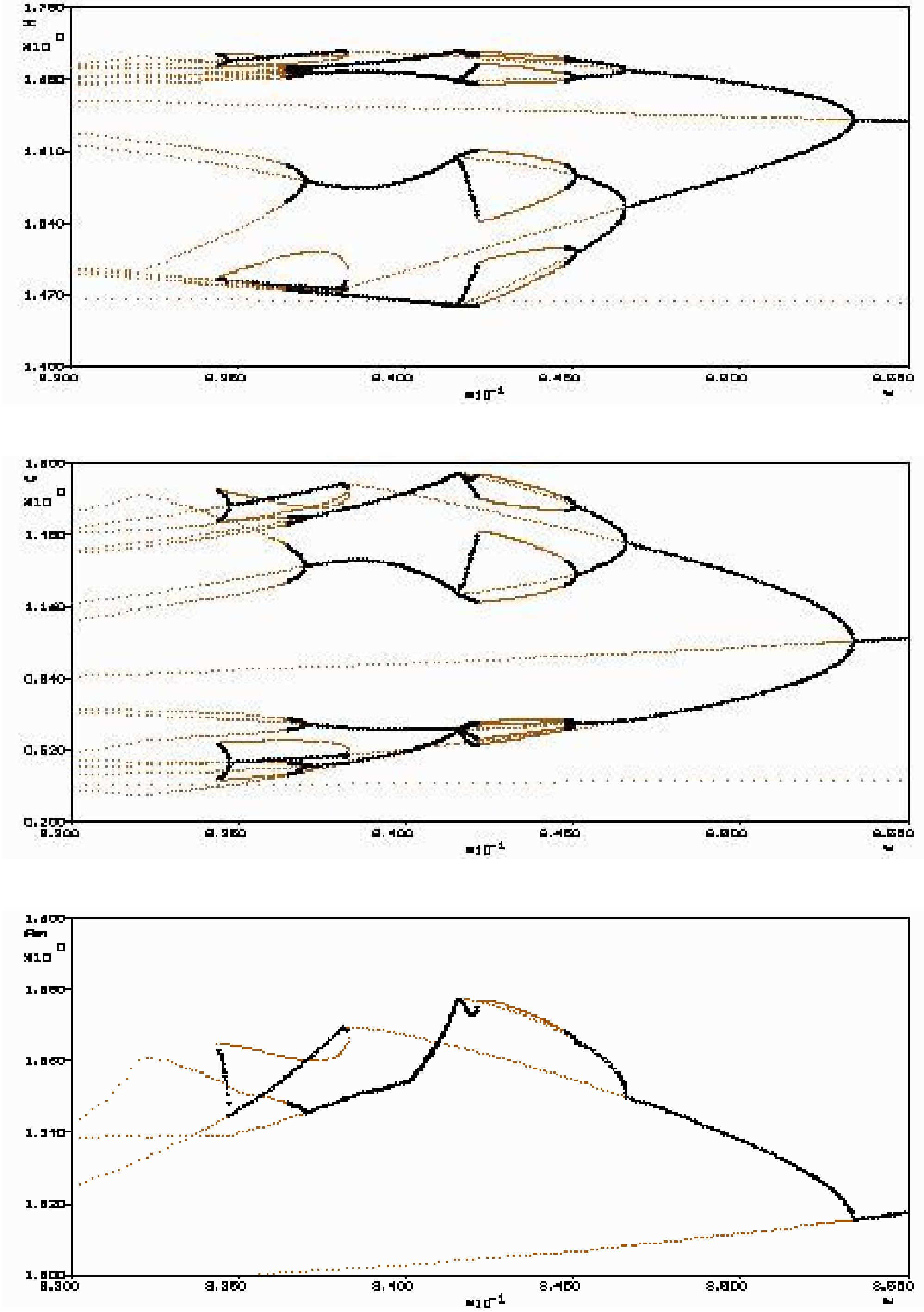

Рис. 2. Бифуркационные диаграммы для вынужденных колебаний в симметричной диссипативной пяти-линейной системе с жестко-мягкой-жесткой упругой характеристикой. Система имеет сложную бифуркационную группу 1T, фрагмент которой с UPI и редким аттрактором показан на рисунке.

Неустойчивые решения и их роль для локального и глобального анализа существенно нелинейных динамических систем. Хорошо известно, что неустойчивые седловые решения могут служить для построения областей притяжения периодических и хаотических аттракторов при существовании в системе нескольких аттракторов. Не менее существенным является знание неустойчивых решений (неустойчивых неподвижных точек) для проведения глобального анализа с использованием продолжения ветвей неустойчивых решений по параметру. Поэтому поиск всех устойчивых и неустойчивых решений в заданной точке пространства и оценка их устойчивости является важной задачей для глобального анализа. При этом может оказаться, что система имеет, например, всего один-два аттрактора и большое число неустойчивых неподвижных точек и подгрупп UPI, которые принадлежат различным (субгармоническим) группам порядка nT. Продолжение решений из этих неустойчивых точек позволяет полностью построить всю (новую) бифуркационную группу и таким образом найти все принадлежащие ей аттракторы.

Коэффициенты нелинейности и рождение нелинейных эффектов. Очевидно, что чем больше нелинейность в динамической системе, тем легче в ней рождаются нелинейные эффекты: появляется многорежимность, субгармонические режимы различного порядка, хаотические аттракторы. Но как оценить степень нелинейности в системе? Для колебательной системы с одной степенью свободы с нелинейной симметрической упругой характеристикой $f(x)$ ранее был предложен коэффициент нелинейности κ_1 , характеризующий наклоны скелетной кривой. Для системы с кубической позиционной силой $f(x) = x^3$ коэффициент нелинейности $\kappa_1 = 1,$ для системы с квадратичной характеристикой $f(x) = x^2 \, sgn\, x,\ \kappa_1 = 0.5$. Хаотические аттракторы появляются при среднем уровне диссипации примерно уже при $\kappa_1 = 0.25$. Существуют и другие независимые характеристики нелинейностей, которые могут быть полезными. К ним, в частности, относятся коэффициенты несимметрии, немонотонности и коэффициенты нелинейности для функций типа $F = xy,$ каждый из которых характеризует тип и величину «своей» нелинейности. Вопрос оценки степени нелинейности в динамических системах пока не нашел своего полного решения, с тем, чтобы можно было надежно предсказывать появление нелинейных эффектов.

Хаотические аттракторы и хаотические переходные режимы. Роль подгрупп UPI с бесконечным числом неустойчивых периодических решений. В настоящий момент можно считать, что основным механизмом рождения хаотических аттракторов являются полные каскады удвоения периодов с образованием подгрупп *UPI* [1]. Важно отметить, что в динамической системе в одном и том же диапазоне параметров могут существовать несколько и даже много различных групп со своими *UPI*. В то же время, как уже отмечалось, в системе может быть всего один периодический или хаотический аттрактор. С другой стороны, в системе может быть несколько хаотических аттракторов одной бифуркационной группы или несколько хаотических аттракторов разных групп. В любом случае наличие подгруппы с *UPI* порождает обязательное существование соответствующего ей хаотического аттрактора и, как правило, хаотического переходного процесса.

Редкие аттракторы. Хаотические оболочки с редкими аттракторами. Существование редких аттракторов различных типов в нелинейных динамических системах уже достаточно полно описано в литературе. Редкие аттракторы найдены во многих типовых колебательных системах, включая системы типа Дуффинга, Ван-дер-Поля, Лоренца, виброударных и многих других. По-видимому, можно предположить, что редкие аттракторы существуют во всех нелинейных системах при соответствующей степени их нелинейности. Новой топологической группой с редкими аттракторами являются так называемые хаотические оболочки. В пространстве двух или более параметров, эти оболочки имеют тонкий слой с хаотическими аттракторами.

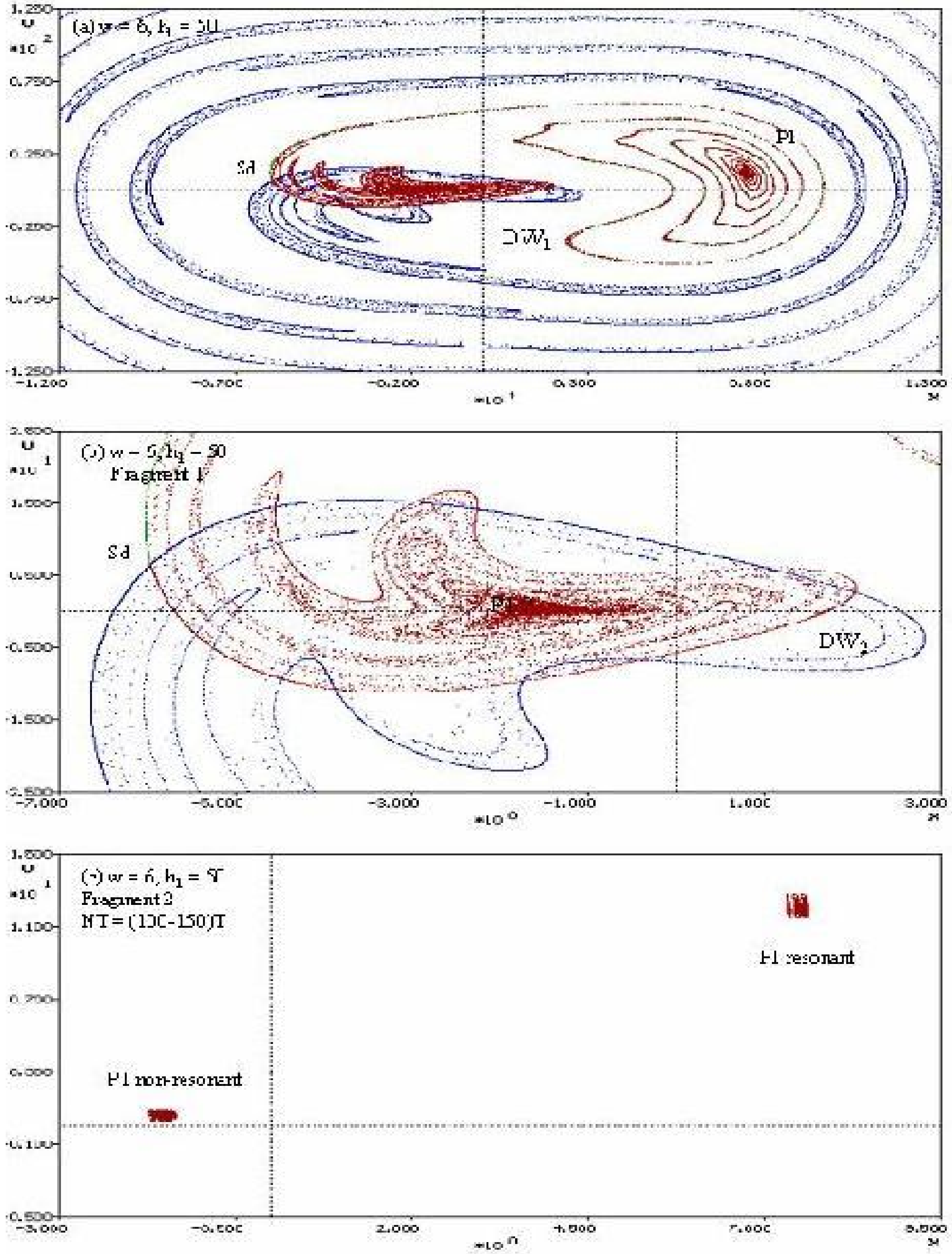

Рис. 3. Симметричная система Дуффинга $f(x) = x + x^3$. Проблема взаимодействия гомоклинической структуры и области с UPI. Динамические ямы и гомоклинические структуры методом сепаратрис узловой точки. В системе имеется гомоклиника, т.к. при w = 6 в системе имеются UPI-2 b UPI-5 бифуркационных групп 2T и 5T. Несмотря на гомоклинику и UPI, в системе всего два регулярных аттрактора: симметричный резонансный P1 и нерезонансный P1. Параметры системы: b = 0.2, $h_1 = 50$, w = 6.

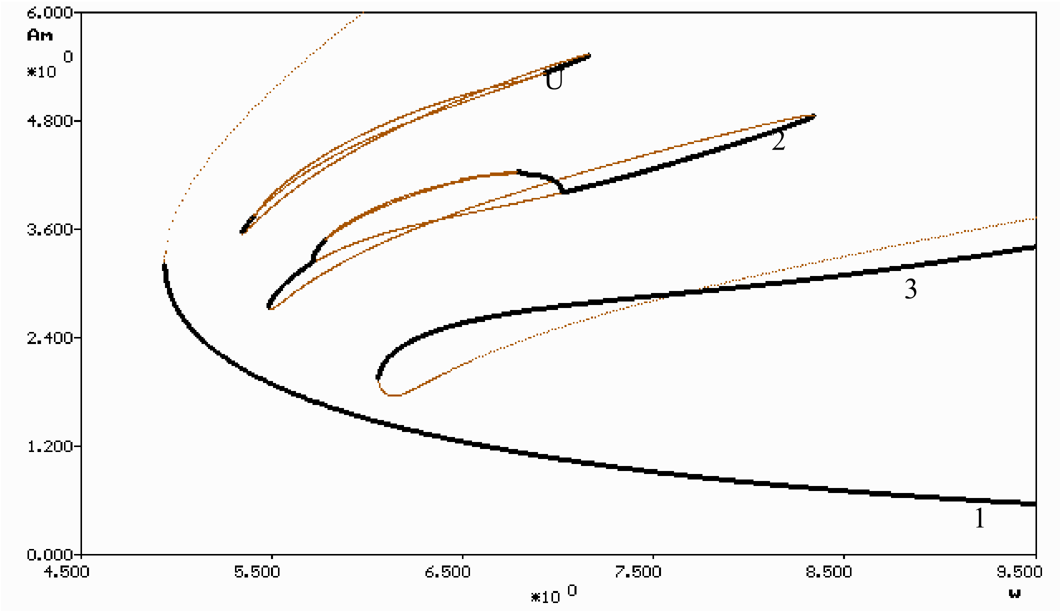

Рис. 4. Иллюстрация механизма рождения гомоклинической структуры, показанной на рис.3. Колебательная система при w = 6 имеет UPI-2 и UPI-5 для бифуркационных групп 2T и 5T.

Как рождаются гомоклинические структуры. Обсуждается классическая проблема гомоклинических структур с позиций метода полных бифуркационных групп. Рождение гомоклинических структур может быть объяснено по-новому, как результат взаимодействия основной бифуркационной группы с гомоклинической структурой и другой группы, как правило, субгармонической не очень высокого порядка, которая обязательно, в случае гомоклиники в системе, имеет свою подгруппу UPI с бесконечным числом неустойчивых решений. При таком подходе можно конкретизировать утверждение (Пуанкаре, Биркхоф, Смейл, Андронов), что система при наличии гомоклиники имеет счетное число неустойчивых периодических режимов разных порядков. Например, для системы с гомоклиникой, показанной на рис. 3, гомоклиника в системе появляется из-за того, что при этих параметрах существуют бифуркационные группы 2T и 5T со своими неустойчивыми периодическими инфинитиумами UPI (рис. 4). Такой подход позволяет понять причину появления гомоклинических структур и хаоса в нелинейных динамических системах.

Литература

1. M. Zakrzhevsky, New concepts of nonlinear dynamics: complete bifurcation groups, protuberances, unstable periodic infinitiums and rare attractors, Journal of

Vibroengineering, 2008 December, Volume 10, Issue 4, p. 421-441

2. В.К.Асташев, Е.Б.Семенова, Об амплитудно-частотных характеристиках ультразвуковых технологических систем, Сборник трудов XV Симпозиума «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем, 2006, Москва-Звенигород, стр. 23-28
3. Blekhman I.I. Vibrational Mechanics, World Scientific, Singapore, (Russian original: Nauka, Moscow, 1994), 2000.