

УДК 534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИЗГИБНЫЕ И КРУТИЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЯХ И СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

В.И. Ерофеев

Приводится обзор результатов недавних исследований по нелинейной волновой динамике стержневых систем, полученных автором и его коллегами в лаборатории волновых процессов в материалах и конструкциях Нижегородского филиала ИМАШ РАН.

Непрерывное увеличение быстродействия и удельной мощности машин и механизмов, забота о снижении веса конструкции при сохранении ее надежности в работе, а также широкое внедрение в современную технику новых композиционных материалов требуют более полного исследования реального напряженно-деформированного состояния. Для этого часто оказывается недостаточно классических линейных теорий и необходимо рассматривать теории более высоких приближений, учитывающих, в частности, геометрическую и физическую нелинейности.

Нелинейные искажения, возникающие при распространении интенсивных изгибных и крутильных волн, могут накапливаться с течением времени и при определенных условиях приведут к сильному укрупнению волновых фронтов и существенному изменению всего волнового процесса. Это, в свою очередь, может вызвать появление больших напряжений, необратимых деформаций в материале и привести к локальной потере устойчивости. Интерес к изучению нелинейных волновых процессов связан с возможностью возникновения даже в простых элементах упругих конструкций специфических нелинейных режимов. С одной стороны, эффекты формирования нелинейных волн с большими градиентами напряжений и деформаций оказываются нежелательными, поскольку могут приводить к разрушению или пластическому течению материала, но, с другой стороны, - они могут быть полезными и найти применение в технологиях обработки материалов, в дефектоскопии и технической диагностике. Теоретические расчеты параметров нелинейных волн необходимы для изучения свойств новых конструкционных материалов, в частности, измерения нелинейных модулей упругости.

В задачах динамики упругих конструкций традиционно уделяется большое внимание распространению изгибных волн в стержнях и стержневых системах. В качестве базовой модели для проведения анализа часто выбирается математическая модель балки, предложенная С.П.Тимошенко [1]. Эта модель, уточняющая техническую теорию изгиба стержней, предполагает, что поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформируемой срединной линии стержня; нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, равны нулю; учитываются инерционные составляющие, связанные с поворотом поперечных сечений.

Модель балки Тимошенко занимает особое место в механике: позволяя хорошо описывать многие процессы, происходящие в реальных конструкциях, она остается достаточно простой, доступной для аналитических исследований.

В [2] получена система уравнений, описывающая изгибные колебания балки Тимошенко с учетом геометрической и физической нелинейностей, которая в предположении малости углов сдвига сводится к одному уравнению относительно поперечного перемещения. Найдены и проанализированы решения нелинейно-упругой балки Тимошенко в виде стационарных волн деформации: периодических волн и солитонов. Для периодических стационарных волн получены нелинейные дисперсионные соотношения. Показано, что по своим дисперсионным свойствам волны в металлических стержнях идентичны линейным волнам, а в стержнях из композитных материалов возможно существование сильнонелинейных волн в том диапазоне скоростей, с которыми линейные волны не распространяются.

При исследовании динамического поведения конструкций с подвижными нагрузками наибольший интерес представляет нахождение их критических скоростей. Эти скорости зависят от дисперсионных свойств направляющей и частоты источника колебаний. Поэтому изучение дисперсионных свойств направляющей относится к первоочередным вопросам. С этой целью в [3] рассмотрены изгибные колебания однородной балки Тимошенко, лежащей на упругом основании. В качестве обобщенных координат, описывающих динамическое поведение балки выбирается поперечное отклонение серединной линии и угол поворота сечения. Предполагается, что упругое основание моделируется в соответствии с гипотезой Винклера.

При движении поездов со скоростью, близкой к скорости волн Рэлея в окружающем железнодорожном полотне грунте, возникает усиление вибрации поезда и железнодорожного полотна. В зависимости от типа почвы эта скорость может варьироваться от 150 до 800 км/ч. Современные высокоскоростные поезда уже достигают нижнего предела. Усиление вибрации на высоких скоростях опасное явление, которое приводит к быстрому изнашиванию железнодорожного полотна и может вызвать сход поезда с рельсов. Поэтому при строительстве высокоскоростных железнодорожных магистралей особенно на мягких почвах увеличивают жесткость грунта. Увеличение жесткости, в свою очередь, обязывает учитывать при расчетах нелинейность упругого основания.

В [3] рассматривается также балка Тимошенко на нелинейно-упругом основании.

Параметр нелинейности является малой добавкой к жесткости основания. При положительном значении этой добавки имеем систему с «жестким» типом нелинейности, а при отрицательном – с «мягким». Как и в линейном случае, система уравнений динамики сводится к одному уравнению относительно поперечного смещения.

Наличие кубической нелинейности в уравнении динамики приводит, разумеется, к генерации высших гармоник, однако, фазовая скорость третьей гармоники будет существенно отличаться от фазовой скорости волны основной частоты, т.е. взаимодействия между этими гармониками практически не происходит (проявление сильной дисперсии). Эффект нелинейного самовоздействия волны на основной частоте, когда изменение амплитуды или частоты волны происходит за счет интенсивности самой этой волны, будет преобладать над эффектом генерации высших гармоник, и последним можно пренебречь. Это позволяет отыскивать решения уравнения динамики в виде одной квазигармоники, т.е. гармонической волны, амплитуда и фаза которой вследствие нелинейности медленно меняются в пространстве и времени, в результате

чего исследование исходного нелинейного уравнения сведется к исследованию уравнения Шредингера.

Согласно критерию Лайтхилла, если нелинейный и дисперсионный параметры уравнения Шредингера имеют противоположные знаки, то в системе будет наблюдаться самомодуляция (модуляционная неустойчивость), трансформирующая квазигармоническую волну в набор волновых пакетов. На спектральном языке эффект характеризуется усилением боковых компонент в спектре модулированной волны. В эти компоненты будет перекачиваться энергия из центральной части спектра возмущения.

В исследуемой системе знаки параметров нелинейности и дисперсии зависят от соотношений между частотой и волновым числом, а знак параметра нелинейности зависит также и от типа нелинейности упругого основания. Расчеты показали, что в системе с «жесткой» нелинейностью, волны, описываемые верхней дисперсионной ветвью, всегда устойчивы к самомодуляции. Для нижней дисперсионной ветви знак параметра дисперсии может изменяться, что связано с наличием у кривой двух точек перегиба. В итоге получаем, что для нижней ветви существует область устойчивости квазигармонических изгибных волн, волновые числа которых расположены между точками перегиба, а области неустойчивости волн находятся в интервалах до- и за точками перегиба.

В системе с «мягким» типом нелинейности изменяется знак параметра нелинейности в уравнении Шредингера, что приводит к смене областей устойчивости и неустойчивости. Волны, описываемые верхней дисперсионной ветвью и волны, описываемые нижней дисперсионной ветвью в интервале между точками перегиба, будут в этом случае неустойчивыми к самомодуляции.

В [4] найдены и проанализированы решения уравнений балки Тимошенко, лежащей на нелинейно-упругом основании, в виде стационарных волн деформации: периодических волн и солитонов. Для периодических стационарных волн получены нелинейные дисперсионные соотношения. Показано, что возможно существование сильнонелинейных волн в том диапазоне скоростей, с которыми линейные волны не распространяются.

Крутильные волны, наряду с изгибными и продольными волнами, играют большую роль в формировании вибрационных полей машиностроительных конструкций. Различные математические модели, описывающие крутильные волны, распространяющиеся в однородных тонких стержнях можно найти, например, в [1]. Эти модели базируются, как правило, на технической теории кручения (теория Кулона) или на уточняющей ее теории стесненного кручения.

В основе технической теории Кулона лежат предположения о недеформируемости поперечного сечения в своей плоскости (жесткий контур) и об отсутствии деформации, т.е. выхода поперечного сечения из первоначального плоского состояния. Сечения стержня, согласно этим гипотезам, скользят друг по другу, поворачиваясь в своей плоскости на малый угол как жесткие площадки. Крутильные волны описываются волновым уравнением и распространяются без дисперсии со скоростью сдвиговых волн в неограниченной среде.

В технической теории стесненного кручения предполагается, что кручение стержня складывается из двух связанных друг с другом движений: поворота поперечного сечения в своей плоскости (кручение по Кулону) и их деформации (т.е.

выхода из первоначального плоского состояния в результате неодинакового растяжения продольных волокон стержня при кручении). Депланация при этом считается пропорциональной относительно углу поворота, а крутильные волны описываются уравнением Власова. Это уравнение, наряду с «волновым» оператором (оператор Даламбера), содержит слагаемые, описывающие дисперсию крутильной волны, т.е. зависимость ее скорости от частоты.

В [5] предложены математические модели, обобщающие уравнения крутильных колебаний стержней Кулона и Власова учетом геометрической нелинейности. В общем случае нелинейность учитывается, как в системе перемещений (поскольку при кручении стержней вектор перемещений может быть конечным даже при малых деформациях), так и в соотношениях, связывающих между собой перемещения и деформации. Проанализированы нелинейные крутильные стационарные волны. Обнаружен эффект расщепления солитоноподобных однополярных волн при встречных столкновениях. В [5, 6] показано, что в ряде случаев наличие нелинейности приносит с собой дисперсию, и нелинейные стационарные волны могут существовать и при отсутствии в линейной среде дисперсии.

В [7] предложены математические модели, описывающие крутильные колебания стержней при конечных углах закрутки, а также изгибные колебания балки с конечными прогибами и конечными углами поворота поперечного сечения. При линеаризации полученные уравнения совпадают, соответственно, с уравнением крутильных колебаний в технической теории Кулона и с уравнениями изгибных колебаний балки Тимошенко. Объединяет эти модели то, что для описания волновых процессов они могут быть сведены к уравнению «Двойной синус-Гордона», имеющему постоянные решения нулевой энергии, известные в физике как вакуумные состояния. Показано, что переход от одного состояния системы к другому может быть описан с помощью уединенной стационарной волны (солитона). Найдены аналитические решения исходных уравнений.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект 08-08-97057-р_поволжье).

Литература

1. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. /Ред. совет: Фролов К.В. (пред.). – М.: Машиностроение. Т. 1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. и доп. /под ред. Болотина В.В. 1999. 504 с.
2. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Нелинейные изгибные стационарные волны в балке Тимошенко // Нелинейный мир. 2008. Т.6. №5-6. С.348-358.
3. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Дисперсионные зависимости и самомодуляция изгибных волн в балке Тимошенко, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. №4. С.27-31.
4. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Несинусоидальные изгибные волны в балке Тимошенко, лежащей на нелинейноупругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. №3. С.30-36.

5. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Крутильные волны конечной амплитуды в упругом стержне // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. №6. С.157-163.
6. Ерофеев В.И., Семерикова Н.П., Серов А.В. Нелинейные стационарные крутильные волны в упругом стержне // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. №1.
7. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Крутильные и изгибные волны конечной амплитуды в упругих стержнях // Вестник научно-технического развития. 2008. №7(11). С.29-34.

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН, Россия, Нижний Новгород

Поступила: 04.03.09.