

УДК 621.01.

СЛАБЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ КОЛЕБАНИЯХ РОТОРНЫХ СИСТЕМ

Л.Я. Банах

Роторные системы как составная часть машиностроительных конструкций приобретают новые качественные свойства вследствие влияния динамических свойств самой конструкции. Поэтому необходимо рассматривать систему с учетом взаимодействий между составляющими подструктурами и элементами. Расчетные модели таких систем содержат сотни степеней свободы, что существенно затрудняет их расчет и анализ. Уже сам процесс выбора расчетной модели неоднозначен и поэтому необходимы критерии точности и эквивалентности расчетных моделей между собой. Основные проблемы, возникающие при анализе и моделировании больших систем:

- выявление в системе сравнительно небольшого числа переменных, определяющих ее вибронное состояние и образующих энергетическое «ядро» в данном диапазоне;
- определение динамических характеристик связанной системы по локальным характеристикам подсистем.

При исследовании больших систем любой природы естественны подходы декомпозиции. Однако, наиболее эффективны такие способы, которые учитывают величину динамических взаимодействий между подсистемами.

I. Критерии слабых динамических взаимодействий. Основная закономерность динамического поведения больших систем - это возникновение слабых взаимодействий между подсистемами, что прослеживается в различных системах и является, по-видимому, общим системным свойством. В механических системах слабые взаимодействия возникают, например, при сильной расстройке частот в подсистемах, большом разбросе инерционных и жесткостных параметров, нарушении регулярности структуры.

В процессе декомпозиции все переменные могут быть разделены на слабо- и сильно связанные [1]. Следовательно, учет слабых динамических взаимодействий приводит одновременно к декомпозиции, как физической системы, так и ее математической модели. Впервые понятие связи и связанности для двух массовых систем было введено в работах [2]. Однако, для многомассовых систем оно потребовало значительного обобщения.

Уравнения упругих колебаний системы, состоящей из ряда подсистем (рис.1), запишем в виде блочной матрицы

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} - \lambda \mathbf{M} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}]_{11} & [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}]_{12} & \dots & [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}]_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}]_{N1} & [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}]_{N1} & \dots & [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}]_{NN} \end{bmatrix} \quad (1)$$

\mathbf{K}_{ii} , \mathbf{M}_{ii} - матрицы жесткости и инерции i -й парциальной подсистемы, \mathbf{K}_{ij} , \mathbf{M}_{ij} - матрицы упругой и инерционной связи между подсистемами i и j , N - число подсистем, n_i - порядок i -й подсистемы. Демпфирование можно учесть, полагая \mathbf{K} комплексным.

Назовем слабосвязанными такие подсистемы i, j , если в собственном векторе связанной системы, компоненты соответствующие данным подсистемам, имеют отношение порядка малости $\varepsilon \ll 1$ (в безразмерном виде).

Безразмерные коэффициенты связей для механических систем [1]:

-энергетические отражают отношение работы связей, к энергии парциальных

$$\alpha_{pr}^{ij} = \frac{(\mathbf{h}_i^p)^T (\mathbf{K}_{ij} - \lambda \mathbf{M}_{ij}) \mathbf{h}_j^r}{(\lambda_i^p \lambda_j^r)^{1/2}}, \quad p=1 \dots n_i, r=1 \dots n_j \quad (2)$$

-спектральные зависят от расстройки частот в подсистемах

$$s_{pr}^{ij} = \frac{\alpha_{pr}^{ij}}{1 - \lambda_i^p / \lambda_j^r} \quad (3),$$

λ_i^p - p -е собственное значение парциальной подсистемы i (λ_i^p - квадрат p -й собственной частоты), \mathbf{h}_i^p - матрица-столбец p -го собственного вектора подсистемы i .

Слабые взаимодействия возникают между подсистемами i и j , если малы оба этих коэффициента, и, следовательно малы нормы матриц \mathbf{a}_{ij} , \mathbf{s}_{ij} элементами которых являются α_{pr}^{ij} , s_{pr}^{ij} [1,3]

$$\|\mathbf{a}_{ij}\| \leq \varepsilon, \|\mathbf{s}_{ij}\| \leq \varepsilon \quad (4)$$

Соотношения (4) отражают малый, порядка ε , обмен энергией между подсистемами. В этом случае безразмерная матрица $\mathbf{D}^* = \mathbf{H}^T \mathbf{D} \mathbf{H}$ представима в виде, содержащем малый параметр ε . Здесь \mathbf{H} - блочно-диагональная матрица, каждый блок которой \mathbf{H}_i составлен из столбцов собственных векторов \mathbf{h}_i^p подсистемы i .

II. Способы декомпозиции в зависимости от вида и расположения слабых взаимодействий. Характер и расположение в системе слабых взаимодействий определяют динамические свойства систем в целом. В зависимости от этого возможны различные способы декомпозиции математической модели, соответствующие различному положению ε -блоков в матрице \mathbf{H} (табл.1). При $\varepsilon = 0$ получаем порождающую систему, которую можно рассматривать как систему сравнения.

Табл.1

Типы слабых взаимодействий	$\ \mathbf{a}_{ij}\ \leq \varepsilon$	$\ \mathbf{a}_{ij}\ \leq \varepsilon, \ \mathbf{s}_{ij}\ \leq \varepsilon$	$\ \mathbf{a}_{ij}\ \leq \varepsilon, \ \mathbf{s}_{ij}\ \leq \varepsilon$
Условия возникновения	Значительное различие упругих характеристик	Большой диапазон собственных частот	Значительное различие парциальных частот
Способ декомпозиции	Разделение на независимые подструктуры	Исключение подструктур	Объединение элементов (агрегирование)
Вид динамической матрицы \mathbf{D}^*	$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \varepsilon \mathbf{D}_{12} \\ - & - \\ \varepsilon \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{nn} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ll} & \varepsilon \mathbf{D}_{lh} \\ - & - \\ \varepsilon \mathbf{D}^{lr}_{lh} & \varepsilon^2 \mathbf{D}_{hh} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ - & - \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{K}_{22} - \varepsilon \lambda \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$

Рассмотрим различные способы декомпозиции слабосвязанных систем.

1. Декомпозиция с помощью разделения на независимые подструктуры. При этом порождающая система образуется из несвязанных парциальных подсистем. Колебания в связанных подсистемах происходят квазинезависимо (за исключением случая близких частот в подсистемах). Решение для независимых подсистем близко к решению связанной системы. Управляя пороговым значением ε можно создавать последовательность моделей сравнения.

2. Исключение подструктур решает важную проблему многомерных систем - построение динамической модели минимальной размерности, ε -эквивалентной исходной в данном диапазоне частот ($0 - \omega_{\max}$). Метод основан на исключении высокочастотных координат и форм колебаний, слабо влияющих на динамику системы, и аналитической оценке этого влияния. Найдено соотношение для η , определяющее предельную частоту λ_{\min} удерживаемых форм колебаний в каждой из подсистем при построении модели наперед заданной точности ε : $\lambda_{\min} = \eta \omega_{\max}$.

$$\frac{b\xi}{\sqrt{|\eta - b| |1 - \eta + b|}} < \varepsilon \quad (5)$$

b - норма матрицы упругой связи между подсистемами, ξ -количество подсистем. Обычно $\eta = 2,32$.

3. Декомпозиция с помощью объединения элементов с малой кинетической энергией с более энергоемкими (агрегирование). Таким способом происходит поэтапная кластеризация. Это возможно, если в системе имеются высокочастотные парциальные элементы. В исходных уравнениях при этом имеется малый параметр при высшей производной. Можно доказать, что энергия агрегированной модели и исходной совпадает с точностью до ε .

Предложенные способы декомпозиции позволяют:

- выделить элементы, вызывающие повышенный вибрационный уровень[3];
- формализовать построение математической модели минимальной размерности с наперед заданной степенью точности ε . Возможна редукция размерности с 1000 - 10000 до нескольких десятков степеней свободы[4].

Коэффициенты слабых взаимодействий (2), (3) оказываются характерными и достаточно универсальными параметрами для больших систем. Действительно, они совпадают с критериями вычислительной обусловленности матриц, с критериями чувствительности системы к изменению параметров, а также определяют степень эквивалентности различных математических моделей между собой[5].

III. Антенное устройство.

Динамический анализ упругих колебаний опорно-поворотного устройства. В качестве примера использования предложенных методов декомпозиции рассмотрим анализ колебаний опорно-поворотного устройства (рис.1), предназначенного для поиска объектов. Оно состоит из 3-х упругих подсистем: нижняя – фундамент- расположена на палубе корабля и подвержена сильным вибрациям (поступательным и угловым), возникающим при работе двигателей. Средняя подсистема вращается вокруг вертикальной оси, а на верхней – находится вал, который медленно вращается или сканирует вокруг горизонтальной оси; там же расположены точные приборы ориентирования. Упругие колебаний опорно-поворотного устройства вызывают большие ошибки показаний приборов.

Ставились следующие задачи:

- снизить уровень колебаний верхней подсистемы с приборами
 - исследовать динамику ротора и погрешности, передающиеся на показания приборов.
- Первая из этих задач решалась предложенными методами декомпозиции:
- разделение на слабосвязанные подсистемы,
 - анализ энергетических и спектральных коэффициентов связи между ними,
 - исключение высокочастотных подструктур и/или форм колебаний.

Исходная конечно-элементная модель с учетом дискретности оребрения (рис.1б) имела \square 5000 степеней свободы. Применяя способ декомпозиции «исключение подструктур», на основе соотношения (5) удалось снизить размерность задачи более, чем на два порядка до 24, сохранив при этом точность расчета низших частот в пределах 10% (табл.2). Диапазон применимости редуцированной модели 0-60 Гц [4].

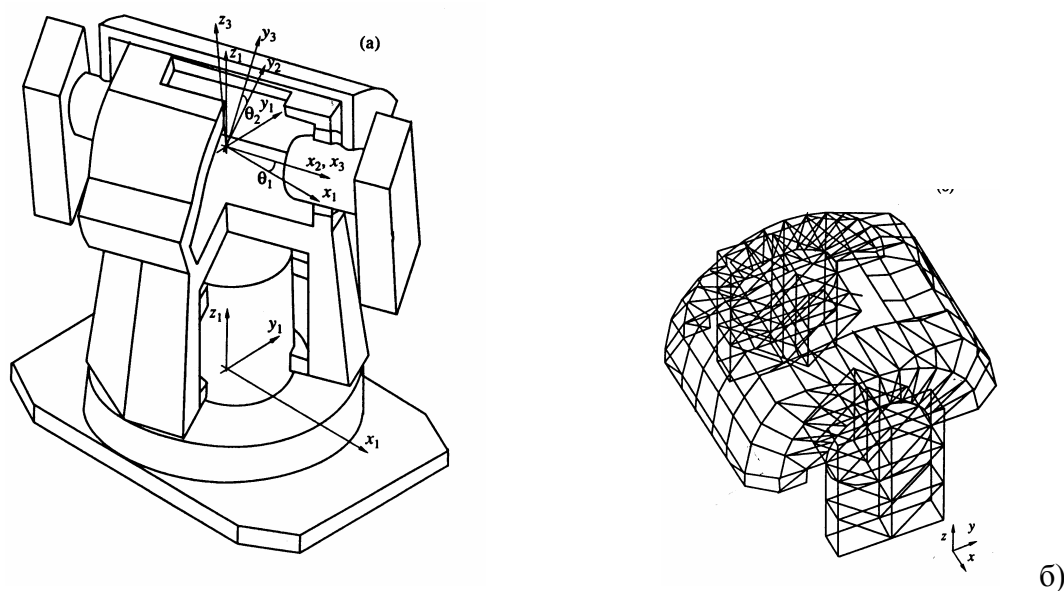


Рис. 1. Опорно-поворотное устройство (а), верхняя подсистема (б)

После этого путем оптимизации теперь уже небольшого числа параметров удалось, во- первых, увеличить частотную отстройку нижней и средней подсистем, а во- вторых совместить узел колебаний верхней подсистемы с местом ее соединения со средней подсистемой; при этом варьировать разрешалось исключительно параметрами оребрения (рис.1б). В результате уровень колебаний был существенно снижен. Справиться с такой оптимизацией системы без снижения ее размерности было бы непосильной задачей.

Табл. 2

Исходная конечно-элементная модель	Количество подсистем	Число степеней свободы	Собственные частоты Гц							
			1	2	3	4	5	6	7	8
	1	1854	122,7	169	170,8					
	2	1446	56,7	60,3	85,6	100	101,8			
	3	1426	2,54	12	15	25,1	27,8	41,2	42,7	47,6
Σ		4726								
Редуцированная модель		24	2,2	10,5	14,5	24,65	27,6	41	42,5	47,5

Крутильные колебания ротора при его сканировании. После такого динамического анализа системы уже можно было приступить к исследованию динамики ротора как составной подсистемы. Задача ставилась следующим образом: исследовать колебания ротора в режиме медленного сканирования, при воздействии высокочастотных вибраций со стороны основания [6].

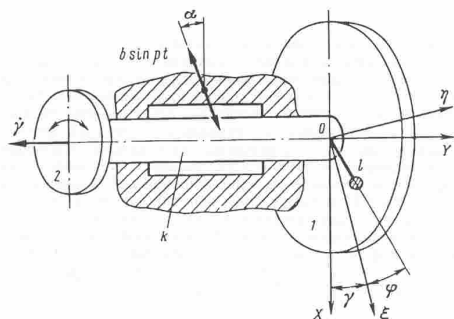


Рис.2 Сканирующий ротор

Вал имеет малую крутильную жесткость по сравнению с изгибной. Опоры подвержены воздействию высокочастотного внешнего возбуждения $b \sin pt$, направленного под углом α к вертикали. Ротор имеет два режима работы: а) медленное вращение и б) сканирование вокруг горизонтальной оси.

Уравнение крутильных колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \ddot{\gamma} + \omega^2 \varphi + P \sin(\varphi + \gamma) + \frac{mlbp^2}{I} \sin pt \sin(\varphi + \gamma - \alpha) + \beta(\dot{\varphi} + \dot{\gamma}) = 0$$

Решение имеет вид суперпозиции быстрых и медленных переменных

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \mu \varphi_2(\omega t), \quad \mu \ll 1$$

При этом появляется вибрационный момент, зависящий от времени, в качестве нелинейного параметрического возбуждения.

Режим сканирования ($\gamma = C \sin \omega t$). Как показал анализ решения уравнения, под действием высокочастотной вибрации возникает постоянный «увод» от положения равновесия (аналогично маятнику Капицы). Увод зависит от угла действия силы и максимален при $\alpha = \pi/4$. Этот увод, хотя и мал, но при больших расстояниях поиска может играть заметную роль. При горизонтальной и вертикальной вибрации ($\alpha = 0, \pi/2$) увод отсутствует. Горизонтальная вибрация даже полезна: она увеличивает сектор сканирования и уменьшает амплитуду колебаний, а вертикальная вибрация, наоборот, увеличивает амплитуду колебаний ротора и уменьшает сектор сканирования.

Литература

1. Банах Л.Я. Слабые взаимодействия при колебаниях механических систем // ДАН, 1994, т.337, №2, Механика. С. 336-338.
2. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
3. Банах Л.Я. Методы декомпозиции при колебаниях многомерных систем // ДАН, 1994, т.337, №3, Техническая физика. С.189-193.
4. Ахметханов Р.С., Банах Л.Я. Построение расчетной модели минимального порядка для сложных колебательных систем // Машиноведение, №3, 1987, С.87-94.
5. Banach L. Vibration Sensivity in Rotor Systems. The International Symposium «Analysis and Synthesis of Nonlinear Dynamical Systems in Mechanics». Riga, Latvia, 1996, P. 18-22.

6. Банах Л.Я., Гольц В.В. Возникновение резонансных режимов при медленном вращении и сканировании неуравновешенного вала // Проблемы машиностроения и надежности машин, №2, 1993, С.32-40.

Институт машиноведения РАН, Россия, Москва