

УДК 621.01:534.1

К ПРОБЛЕМЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ НА ВЫСШИХ ФОРМАХ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ УЧЁТЕ МАЛОЙ ДИССИПАЦИИ

И.И. Вульфсон

На примере крутильной колебательной системы с распределёнными параметрами исследуется эффект пространственной локализации колебаний при малых позиционных диссипативных силах. Установлена диссипативная природа возникновения асимметрии форм резонансных колебаний на высших частотах при симметричных граничных условиях, а также локальная нечувствительность к резонансной и антирезонансной настройке возмущения.

Предварительные замечания. Учет малых диссипативных сил в практических инженерных расчетах обычно сводится к следующей процедуре. Справедливо полагая, что роль демпфирования достаточно существенна лишь в окрестности резонансов, сначала определяют вынужденные колебания вне этих зон без учета сил сопротивления. Далее для расчета резонансных амплитуд обычно используется энергетический способ, причем форма колебаний выбирается эквивалентной форме свободных колебаний на соответствующей собственной частоте, а сдвиг фаз между вынужденными колебаниями и вынуждающей силой принимается равным $\pi/2$. При таком подходе симметричным граничным условиям отвечает симметричная форма резонансных колебаний даже при несимметричном приложении вынуждающей силы.

Между тем опыт экспериментальных исследований и эксплуатации машин свидетельствует о существенной асимметрии форм колебаний при резонансах и антирезонансах, что особенно заметно на высших формах. Как отмечается в монографии [1], подобные эффекты можно трактовать как пространственную локализацию энергии колебаний, которые в реальных макросистемах, всегда сосуществуют с эффектами диссипации, внешне проявляющимися в уменьшении амплитуды волны по мере удаления от области возбуждения.

Определение амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик. Для изучения рассматриваемой проблемы в качестве эталонной примем модель крутильной колебательной системы с распределёнными параметрами, в которой крайние сечения $x = 0$ и $x = l$ заземлены, а в сечении $x = l_1$ приложен вынуждающий момент $M = M_0 \sin \omega t$ (рис. 1,а). Данная модель одновременно служит непрерывным приближением для цепочек осцилляторов (рис. 1,б), являющихся объектом теории кристаллических решёток, линий электропередач, динамики машин и других приложений.

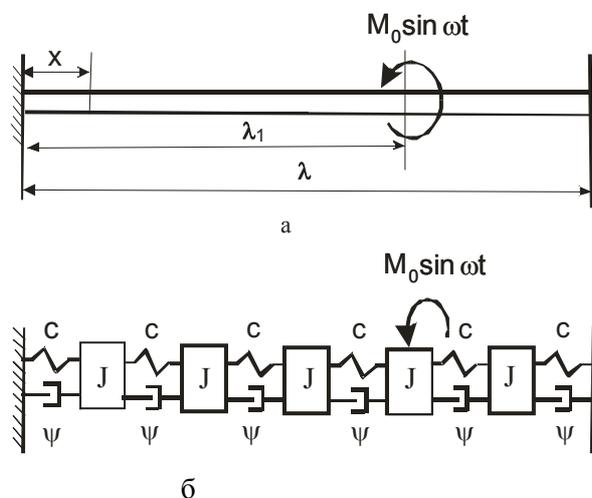


Рис. 1 Динамические модели

Введем в рассмотрение комплексную амплитуду вынужденных колебаний в сечении x , которую определим как [2]

$$X = a(x)e^{i\gamma(x)} \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (1)$$

Функция X на каждом из двух участков $x_1 \in [0, l_1]$, $x_2 \in [0, l_2]$, ($l_2 = l - l_1$) отвечает следующим условиям :

$$\frac{\partial^2 X_s}{\partial x_s^2} + \frac{\omega^2}{g_0^2} X_s = 0 \quad (s = 1, 2), \quad (2)$$

где $g_0^2 = \bar{G}J / \rho$, J – полярный момент инерции; ρ – массовый момент инерции единицы длины; \bar{G} – комплексный модуль сдвига, который согласно гипотезе Е.С. Сорокина [3] определяется как $\bar{G} = G(1 + 2\delta i)$. Здесь G – модуль сдвига без учета конструкционного демпфирования; $\delta = \vartheta_* / (2\pi)$; ϑ_* – логарифмический декремент.

Решения уравнения (2) имеют вид

$$X_1 = K_0 \cos \vartheta_1 + N_0 \sin \vartheta_1; \quad X_2 = K_1 \cos \vartheta_2 + N_1 \sin \vartheta_2, \quad (3)$$

где $\vartheta_s = \omega x_s / g_0$ (x_s – отсчитывается от начала участка).

С учетом граничных условий

$$\begin{aligned} K_1 &= N_0 \sin \theta_1, \quad N_1 = N_0 \cos \theta_1 + \sigma M_0 / \omega, \\ K_2 &= N_0 \sin \theta_1 + \sigma M_0 \omega^{-1} \sin \theta_2 = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\theta_s = \omega l_s \sqrt{\rho / \bar{G}J}$, $\theta = \theta_1 + \theta_2$, $\sigma = (\bar{G}J\rho)^{-0,5}$.

Из зависимостей (4) следует

$$X_1(x_1) = -\frac{\sigma}{\omega} M_0 \frac{\sin \vartheta_1(x) \sin \theta_2}{\sin \theta} \quad (5)$$

$$\text{При этом } \theta_s = \theta_s^* (1 - i\delta), \quad (6)$$

где $\theta_s^* = \operatorname{Re} \theta_s$ (при $\delta \ll 1$ $\theta_s^* \approx |\theta_s|$).

Введем безразмерный параметр, пропорциональный амплитуде вынужденных колебаний в сечениях $x = x_1 \in [0, l_1]$

$$\kappa = \pi c X_1 / M_0, \quad (7)$$

где $c = GJ/l$.

На основании (5) и (6) после определения модуля и аргумента входящих комплексных величин получаем

$$\kappa = \frac{\pi}{\theta^*} \sqrt{\frac{(\sin^2 \vartheta^* + \operatorname{sh}^2 \delta \vartheta^*)(\sin^2 \theta_2^* + \operatorname{sh}^2 \delta \theta_2^*)}{\sin^2 \theta^* + \operatorname{sh}^2 \delta \theta^*}}, \quad (8)$$

$$\gamma = \pm \left\{ \arctg \left[\operatorname{ctg} \theta_2^* \operatorname{th} \delta \theta_2^* \right] - \arctg \left[\operatorname{ctg} \theta^* \operatorname{th} \delta \theta^* \right] + \arctg \left[\operatorname{ctg} \vartheta^* \operatorname{th} \delta \vartheta^* \right] - \delta \right\}. \quad (9)$$

Здесь звездочкой отмечены модули соответствующих комплексных величин.

Асимметрию форм колебаний в сечениях, равноудаленных от концов системы, характеризует снижение амплитуд

$$\zeta = \frac{\kappa(l-l_1)}{\kappa(l_1)} = \frac{\sin^2 \theta_2^* + \operatorname{sh}^2 \delta \theta_2^*}{\sqrt{(\sin^2 \theta_1^* + \operatorname{sh}^2 \delta \theta_1^*)(\sin^2 \theta_2^* + \operatorname{sh}^2 \delta \theta_2^*)}}, \quad (10)$$

где $\theta_1^* = (1 - \xi)\theta^*$, $\theta_2^* = \xi\theta^*$, $\xi = l_1/l$. При резонансах $\theta^* = k\pi$, где k – целое число. Если при этом рассматриваемые сечения отвечают пучности ($\sin^2 \theta_1 = \sin^2 \theta_2 = 1$), то согласно (10)

$$\zeta = \zeta_1 = \operatorname{ch} \delta \theta_2^* / \operatorname{ch} \delta \theta_1^*. \quad (11)$$

С ростом номера резонирующей формы κ имеем $\zeta_1 \rightarrow \exp \left[-(1 - \xi) \delta \theta^* \right]$.

При отсутствии диссипации ($\delta = 0$) на основании (10) для резонансных режимов,

как и следовало ожидать, $\zeta = 1$, что отвечает симметрии формы колебаний.

Для иллюстрации исследуемого эффекта были произведены расчеты амплитудно-частотной характеристики $\kappa(\pi/\theta^*)$ (см. рис.2). Анализ проведен при $\delta=0,05$ для двух сечений $x = l/16$ (кривая 1) и $x = l_1 = 15l/16$ (кривая 2).

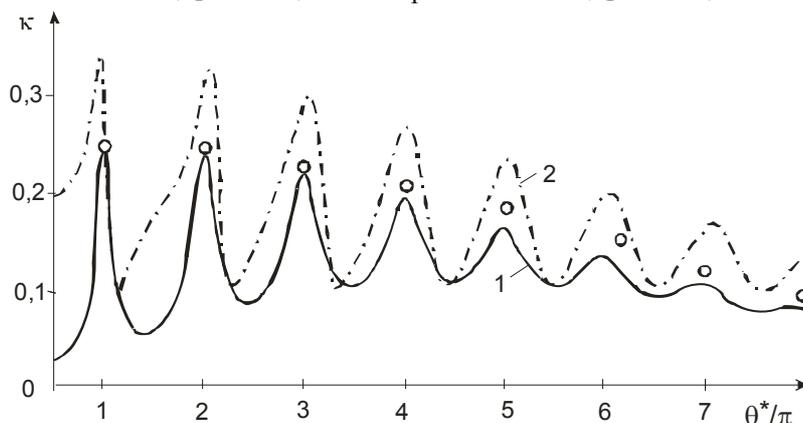


Рис. 2 Амплитудно-частотная характеристика $\kappa(\pi/\theta^*)$

При этом вынуждающий момент был приложен в сечении $x_1 = l_1$ ($\xi = 15/16$). На графике также нанесены точки, отвечающие резонансным амплитудам, которые определены с помощью следующей зависимости, полученной энергетическим методом:

$$\kappa_{рез} = \frac{\pi a}{M_0} = \frac{\pi}{(\theta^*)^2 \delta} |\sin \vartheta_1^* \sin \theta_2^*|. \quad (12)$$

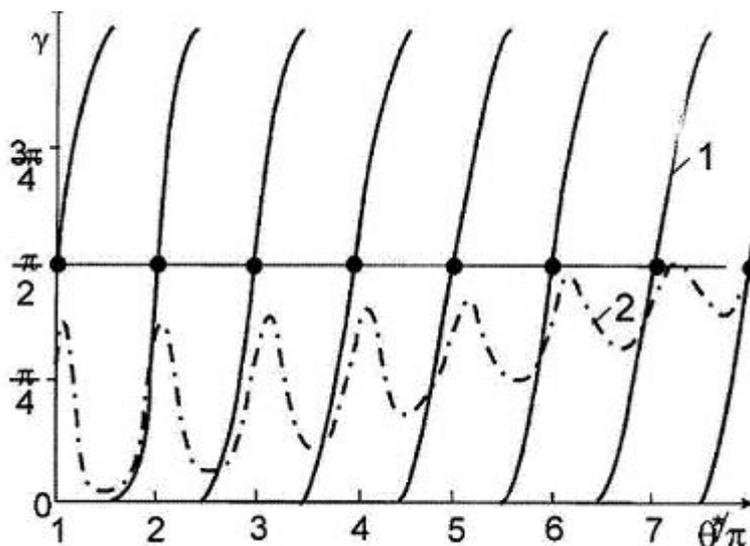


Рис. 3 Фазочастотная характеристика $\gamma(\theta^*/\pi)$

Ввиду равноудаленности рассматриваемых сечений от концов и симметрии форм свободных колебаний формула (12) отвечает стоячей волне и таким образом определяет амплитуду в каждом из этих сечений.

На рис.3 приведена фазочастотная характеристика, анализ которой, в частности, показывает, что фазовый сдвиг при резонансе может существенно отличаться от $\pi/2$ (нумерация кривых см. рис.2).

Заключение. Анализ результатов расчета, позволяет сделать следующие выводы.

1. Форма резонансных колебаний, которой отвечает целое значение θ^*/π , даже при малом конструкционном демпфировании существенно отличается от формы свободных колебаний на той же частоте.

2. Резонансная амплитуда для симметричных сечений убывает по мере удаления сечения от места приложения нагрузки, причем с ростом частоты этот эффект усиливается. Так, например, при $\theta^*/\pi=1$ имеем значение K в сечении под нагрузкой (кривая 2) в 1,25 раза выше, чем в симметричном сечении, в то время как при $\theta^*/\pi=8$ отношение составляет 1,77.

3. Энергетический способ расчета резонансных амплитуд дает результаты, близкие к минимальным значениям K для низших частот и к усредненным значениям для высших частот.

4. С ростом частоты значение амплитуд при антирезонансе

($\theta^*/\pi=1,5; 2,5; 3,5; \dots$) приближается к резонансной амплитуде, что особенно проявляется в сечениях, удаленных от места приложения нагрузки. Так, например, при $x_1=l/16$ имеем при $\theta^*/\pi=7,5$ (антирезонанс) $K=0,075$, а при $\theta^*/\pi=8$ резонанс)- $K=0,078$.

5. Фазовый сдвиг сохраняет "традиционные" значения для резонансов ($\gamma \approx \pi/2$) и антирезонансов ($\gamma = 0, \pi$) лишь для сечения $x=l/16$. В то же время фазовый сдвиг непосредственно под нагрузкой ($x_1=15l/16$) с ростом частоты принимает стабильные значения, мало отличающиеся от некоторого среднего значения $\gamma_0 = 83^0$. Так, например, при $\theta^*/\pi=7; 7,5; 8$ значения γ равны $79,2^0, 80,5^0, 87,1^0$.

Таким образом, установлено, что малое гистерезисное сопротивление способно оказать существенное влияние на форму резонансных колебаний и пространственное распределение фаз колебаний. При этом само понятие о малости диссипативных факторов в данном случае существенным образом зависит от исследуемой резонансной зоны и, вообще говоря, нуждается в дальнейших уточнениях.

При анализе данной задачи было принято равномерное распределение диссипативных факторов вдоль оси x . Между тем возможны случаи, когда наиболее существенная диссипация сосредоточена в определенных сечениях (например, в подшипниках) или, в общем случае, распределенной по оси x [5], поэтому рассматриваемая проблема далеко не исчерпана. Можно предположить, что в еще в большей степени выявленный эффект проявится при анализе полигармонических колебательных процессов. Поскольку использование гипотезы Е.С. Сорокина, строго говоря, возможно лишь при моногармонических колебаниях, при решении этой задачи необходимо более полный учет нелинейной природы диссипативных сил [4,5,6], что требует отдельного рассмотрения.

Литература

1. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. 216 с.
2. Вульфсон И. И., Коловский М.З. Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. 281 с.
3. Сорокин Е.С., Динамический расчет несущих конструкций.–М.: Госстрой издат, 1958. 325 с.
4. Вульфсон И. И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. 309 с.
5. Нелинейные задачи динамики и прочности машин/ Под ред, В.Л. Вейца. –Л.: Издательство Ленингр. ун-та, 1983. 336 с.
6. Пальмов В.А, Колебания упруго-пластичных тел. –М.: Наука, 1976. 328 с .

*Санкт-Петербургский Государственный Университет Технологии и Дизайна,
Санкт-Петербург, Россия.*