

УДК 539.3

К ОЦЕНКЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ И ИЗНАШИВАНИЯ ВЯЗКОУПУГОВОГО СЛОЯ КОМПОЗИТА ПРИ КОНТАКТНОМ И ФРИКЦИОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЖЕСТКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

П.П.Усов¹, В.Д.Данилов²

Аннотация. В работе решена контактная задача для вязкоупругого слоя произвольной толщины и жесткого цилиндра. Проведен анализ влияния вязкоупругих свойств на распределение контактного давления. Показано, что размер области контакта и распределение контактного давления существенно зависят от скорости относительного перемещения трущихся поверхностей и толщины слоя. При определенных условиях функция распределения контактного давления может иметь два максимума, один из которых расположен вблизи входной граничной точки области контакта. Этот максимум может быть высоким и существенно влиять на характеристики контакта.

Композиционный материал нельзя моделировать чисто упругой средой. Он проявляет вязкоупругие свойства. Эти свойства могут существенно влиять на распределение контактного давления и, соответственно, на износ слоя.

Элементный закон изнашивания трущихся тел обычно принимают в виде [1]

$$\frac{\partial I}{\partial s} = kp^m, \quad (1)$$

где I - линейный износ, s - путь трения скольжения, p - контактное давление, k - коэффициент, который обычно определяется экспериментально. Значение I в какой-либо точке слоя можно определить, интегрируя уравнение (1). При этом необходимо учитывать, что данная точка слоя проходит всю область контакта тел и давление, действующее в данной точке, меняется в соответствии с распределением контактного давления по области контакта.

Если в (1) значение $m=1$, то есть если элементный закон изнашивания является линейным, то интеграл по области контакта будет пропорционален нагрузке, и не будет зависеть от характера распределения давления по области контакта. В этом случае суммарный износ будет пропорционален приложенной нагрузке. Однако значение m , как правило, не равно единице. В этом случае износ трущихся тел будет зависеть не только от нагрузки, но и от характера распределения давления по области контакта. Таким образом, чтобы произвести достаточно точный расчет износа какого-либо узла трения необходимо определить распределение контактного давления по области контакта. В связи с этим большое значение приобретает задача исследования вязкоупругих свойств покрытия на распределение контактного давления.

Рассмотрим задачу о контакте жесткого цилиндра и вязкоупругого слоя композиционного материала. Задачу рассмотрим в системе координат, в которой центр цилиндра покоится, а слой движется в положительном направлении оси x со скоростью V .

Цилиндр вращается и линейная скорость поверхности цилиндра в положительном направлении оси x равна V_1 . Скорости V и V_1 не равны между собой, поэтому имеет место скольжение контактирующих поверхностей со скоростью скольжения $V - V_1$. На рис. 1 приведена расчетная схема для случая $V > V_1$. Вследствие скольжения происходит изнашивание вязкоупругого слоя и его толщина уменьшается. Цилиндр прижимается к вязкоупругому слою силой Q . Ставится задача определения области контакта, распределения контактного давления в этой области и износа вязкоупругого слоя в некоторой точке его поверхности за время прохождения этой точки через область контакта.

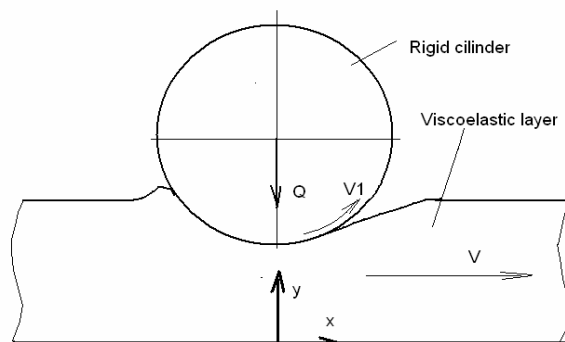


Рис. 1 Расчетная схема.

На участке поверхности упругого слоя, где в него вдавливаются жесткий цилиндр, условие контакта тел с учетом малости размера площадки контакта по сравнению с радиусом цилиндра записываем в виде:

$$U_y(X, H) = -\Delta + \frac{X^2}{2R}, \quad X_1 \leq X \leq X_2, \quad (2)$$

где Δ - смещение центра цилиндра по направлению оси y относительно положения, в котором цилиндр касается вязкоупругого слоя, но слой не деформирован; R - радиус цилиндра; X_1 и X_2 - координаты граничных точек области контакта тел; $U_y(X, H)$ - вязкоупругие перемещения точки поверхности вязкоупругого слоя, имеющей координаты X, H .

Распределение давления по области контакта определяется из уравнения (2), после подстановки в него выражения для $U(X, H)$ через контактное давление. Чтобы определить это выражение необходимо решить уравнения теории вязкоупругости для вязкоупругого слоя.

Зависимости между деформациями и напряжениями в вязкоупругом слое принимаем в виде [2]

$$\sigma_x + T_\sigma \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = \lambda \left(\theta + T_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + 2\mu \left(\varepsilon_x + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_y + T_\sigma \frac{\partial \sigma_y}{\partial t} = \lambda \left(\theta + T_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} \right) + 2\mu \left(\varepsilon_y + T_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} \right), \quad (4)$$

$$\tau + T_\sigma \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\mu \left(\gamma + T_\varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right), \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial X}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial U_y}{\partial Y}, \quad 2\gamma = \frac{\partial U_x}{\partial Y} + \frac{\partial U_y}{\partial X}, \quad \theta = \frac{\partial U_x}{\partial X} + \frac{\partial U_y}{\partial Y}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Параметр E в (3)-(5) представляет собой длительный модуль упругости. Когда процессы во времени происходят достаточно медленно и производными по времени можно пренебречь, то уравнения (3)-(5) переходят в обычные уравнения теории упругости, в которых E - модуль упругости, а ν - коэффициент Пуассона. Если же процессы во времени происходят достаточно быстро и члены в системе (3)-(5), не являющиеся производными, малы, и ими можно пренебречь, то уравнения (3)-(5) переходят в обычные уравнения теории упругости с модулем упругости $\frac{ET_\varepsilon}{T_\sigma}$ и коэффициентом Пуассона ν . Таким образом, величина $\frac{ET_\varepsilon}{T_\sigma}$ представляет собой мгновенный модуль упругости.

Мгновенный модуль упругости обычно в несколько раз больше длительного модуля упругости, то есть обычно $\frac{T_\varepsilon}{T_\sigma} > 1$.

Рассматривая установившийся режим, в уравнениях (3)-(5) заменим $\frac{\partial}{\partial t}$ на $V \frac{\partial}{\partial X}$. В результате вместо уравнений (3)-(5) получим систему уравнений

$$\sigma_x + T_\sigma V \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \lambda \left(\theta + T_\varepsilon V \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + 2\mu \left(\varepsilon_x + T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} \right),$$

$$\sigma_y + T_\sigma V \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = \lambda \left(\theta + T_\varepsilon V \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + 2\mu \left(\varepsilon_y + T_\varepsilon V \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} \right),$$

$$\tau + T_\sigma V \frac{\partial \tau}{\partial x} = 2\mu \left(\gamma + T_\varepsilon V \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right),$$

Введем новые переменные:

$$\sigma_x^* = \sigma_x + T_\sigma V \frac{\partial \sigma_x}{\partial X}, \quad \sigma_y^* = \sigma_y + T_\sigma V \frac{\partial \sigma_y}{\partial X}, \quad \tau^* = \tau + T_\sigma V \frac{\partial \tau}{\partial X},$$

$$U_x^* = U_x + T_\varepsilon V \frac{\partial U_x}{\partial X}, \quad U_y^* = U_y + T_\varepsilon V \frac{\partial U_y}{\partial X},$$

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial U_x^*}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^* = \frac{\partial U_y^*}{\partial y}, \quad 2\gamma^* = \frac{\partial U_x^*}{\partial y} + \frac{\partial U_y^*}{\partial x}, \quad \theta^* = \frac{\partial U_x^*}{\partial x} + \frac{\partial U_y^*}{\partial y}.$$

Нетрудно убедиться в том, что введенные функции $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau^*, \varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \gamma^*$ удовлетворяют уравнениям, эквивалентным уравнениям равновесия, совместности деформаций и закону Гука для изотропного упругого тела. Это позволяет получить решение рассматриваемой задачи путем коррекции решения аналогичной задачи для упругого слоя, приведенного в работе [3]. А именно, решая методом преобразования Фурье уравнения относительно функций $U_x^*(x, y), U_y^*(x, y)$ для случая, когда

$$\sigma_y^*(x, y) \Big|_{y \rightarrow H} = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_y^*}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U_x^*}{\partial x} \right] \Big|_{y \rightarrow H} = -\delta(x),$$

$$\tau^*(x, y)|_{y \rightarrow H} = \mu \left(\frac{\partial U_x^*}{\partial y} + \frac{\partial U_y^*}{\partial x} \right) \Big|_{y \rightarrow H} = -f \cdot \delta(x),$$

где $\delta(x)$ дельта – функция, относительно преобразований Фурье функций $U_x^*(x, y)$, $U_y^*(x, y)$, получим выражения, эквивалентные выражениям, приведенным в работе [3] для преобразований Фурье перемещений упругого слоя.

В результате для перемещения $u_y^\delta(x, y)|_{y=1}$, где $u_y^\delta = \frac{U_y^\delta}{H}$, $x = \frac{X}{H}$, $y = \frac{Y}{H}$, а верхний символ δ означает, что данное перемещение относится к δ - образному распределению давления, получаем выражение:

$$u_y^\delta(x, 1) = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{t} F_{vel}(t) dt + \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} G_{vel}(t) dt, \quad (6)$$

$$F_{vel}(t) = F(t) \frac{1 + \tau_\sigma \tau_\varepsilon t^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 t^2} - fG(t) \frac{(\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)t}{1 + \tau_\varepsilon^2 t^2}, \quad G_{vel}(t) = fG(t) \frac{1 + \tau_\sigma \tau_\varepsilon t^2}{1 + \tau_\varepsilon^2 t^2} + F(t) \frac{(\tau_\varepsilon - \tau_\sigma)t}{1 + \tau_\varepsilon^2 t^2},$$

$$F(t) = \frac{m+1}{2\pi} \frac{mt - (m+2)sh(t)ch(t)}{m(m+2)ch^2(t) + m^2t^2 + 1}, \quad G(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{(m+2)ch^2(t) - m^2t^2 - m - 2}{m(m+2)ch^2(t) + m^2t^2 + 1},$$

$$m = (\lambda + \mu)/\mu = 1/(1 - 2\nu), \quad \tau_\varepsilon = \frac{T_\varepsilon V}{H}, \quad \tau_\sigma = \frac{T_\sigma V}{H}.$$

Значение $U_y(X, H)$, входящее в (2), можно определить по формуле

$$U_y(X, H) = H \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\mu} p(x - \xi) u_y^\delta(\xi, 1) d\xi.$$

Дальнейший ход решения задачи такой же, как и в работе [3]. Отличие состоит только в том, что здесь появляются новые медленно сходящиеся несобственные интегралы. Эти интегралы вычисляются, используя методы теории функций комплексной переменной. При этом ряд интегралов определяются в виде конечной формулы, а ряд интегралов сводятся к суммированию рядов. Приведем некоторые из этих интегралов:

$$\int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1 + \tau_\varepsilon^2 t^2} dt \right) dx = \frac{\pi}{2} J(a, b, 1/\tau_\varepsilon),$$

$$J(a, b, z) = \begin{cases} \exp(-za) - \exp(-zb), & a \geq 0, \\ 2 - (\exp(za) + \exp(-zb)), & a < 0, b > 0, \\ \exp(zb) - \exp(za), & b \leq 0, \end{cases}$$

$$\int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\cos(xt) th(t)}{t(1 + \tau_\varepsilon^2 t^2)} dt \right) dx = \frac{\pi}{2} \tau_\varepsilon tg \left(\frac{1}{\tau_\varepsilon} \right) J(a, b, 1/\tau_\varepsilon) + \pi \sum_{k=0}^\infty \frac{\tau_k^4 J(a, b, 1/\tau_k)}{\tau_k^2 - \tau_\varepsilon^2}, \quad \tau_k = \frac{2}{\pi(2k+1)},$$

$$\int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t(1+\tau_\varepsilon^2 t^2)} dt \right) dx = \frac{\pi}{2} \left\{ |b| - |a| + \tau_\varepsilon \left[\exp\left(-\frac{|b|}{\tau_\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{|a|}{\tau_\varepsilon}\right) \right] \right\},$$

$$\int_a^b \left(\int_0^\infty \frac{\sin(xt) \operatorname{th}(t)}{(1+\tau_\varepsilon^2 t^2)} dt \right) dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{\tau_\varepsilon}\right) \left[\exp\left(-\frac{|a|}{\tau_\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{|b|}{\tau_\varepsilon}\right) \right] + \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_k^3 \left[\exp\left(-\frac{|a|}{\tau_k}\right) - \exp\left(-\frac{|b|}{\tau_k}\right) \right]}{\tau_k^2 - \tau_\varepsilon^2},$$

Интегралы, которые быстро сходятся, вычисляются методом численного интегрирования. При этом никаких численных проблем не возникает.

Как показывают результаты численных расчетов, характер зависимостей $p(x)$ в случае вязкоупругого слоя более многообразен, чем в случае упругого тела.

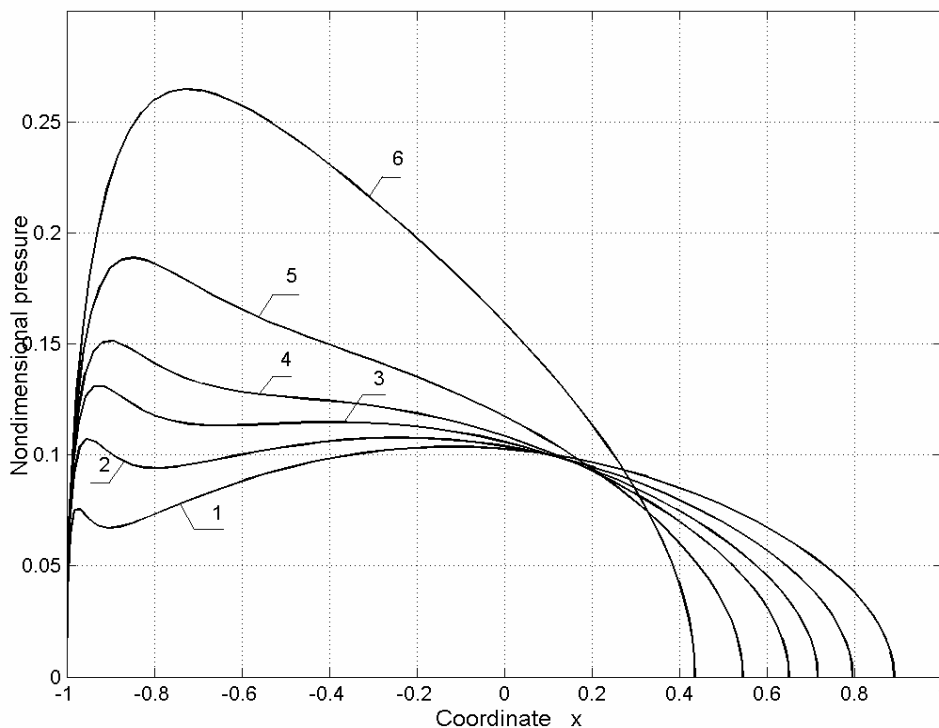


Рис. 2. Функции распределения контактного давления при различных значениях скорости движения V :
1- $V = 0,4 \text{ m/s}$, 2- $V = 0,8 \text{ m/s}$, 3- $V = 1,2 \text{ m/s}$, 4- $V = 1,6 \text{ m/s}$,
5- $V = 2,5 \text{ m/s}$, 6- $V = 5 \text{ m/s}$.

Для примера на рис. 2 приведены функции распределения безразмерного давления $\bar{p} = p/\mu$, полученные при коэффициенте трения $f = 0$, радиусе цилиндра $R = 0,05 \text{ m}$, толщине слоя $H = 0,002 \text{ m}$, коэффициенте Пуассона $\nu = 0,35$, $T_\varepsilon = 0,0007 \text{ c}$, $T_\sigma = 0,0001 \text{ c}$, входной координате области контакта $X_1 = -H = -0,002 \text{ m}$ и различных значениях скорости движения V .

Так как фиксировалась постоянной входная координата области контакта, то безразмерная погонная нагрузка $\bar{Q} = \frac{Q}{\mu H}$, полученная в результате расчетов, с ростом скорости растет. Полученные значения \bar{Q} при различных значениях V приведены в таблице.

V м/с	0,4	0,8	1,2	1,6	2,5	5,0
\bar{Q}	0,156	0,16	0,167	0,174	0,196	0,266

Видно, что при изменении V с 0,4 м/с до 1,2 м/с нагрузка остается практически постоянной, а распределение давления меняется существенным образом. В частности, максимальное давление существенно возрастает (почти в полтора раза), а размер области контакта существенно уменьшается. При этом уменьшение области контакта осуществляется путем смещения выходной граничной точки к входной граничной точке.

Принципиальным отличием в характере распределения давления в случае вязкоупругого слоя по сравнению с упругим слоем является наличие двух максимумов давления при малой скорости движения.

По заданному значению \bar{Q} значение полной нагрузки, прижимающей тела друг к другу, можно определить по формуле

$$W = \bar{Q}HL \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (7)$$

где L - ширина области контакта в направлении оси цилиндра. Отметим, что величина E в (7) представляет собой длительный модуль упругости, то есть наименьший из двух модулей.

После определения функции распределения контактного давления в зависимости от скорости движения и приложенной нагрузки износ слоя за один цикл может быть определен путем интегрирования выражения (1) по области контакта.

Выводы.

Сформулирована контактная задача для жесткого цилиндра и вязкоупругого слоя. Решение контактной задачи сведено к решению интегрального уравнения, ядро которого представляет собой сумму несобственных интегралов. Медленно сходящиеся несобственные интегралы вычисляются методами теории функций комплексной переменной, остальные интегралы вычисляются численными методами. Разработанный таким образом алгоритм численного решения контактной задачи является численно устойчивым.

Проведен анализ вязкоупругих свойств слоя на распределение контактного давления. Показано, что распределение контактного давления существенно зависит от скорости относительного движения трущихся поверхностей. В частности, при определенных условиях функция распределения давления может иметь два максимума, что невозможно в случае чисто упругого слоя.

Разработанный метод решения контактной задачи для вязкоупругого слоя может быть использован для расчета износа реальных узлов трения с покрытиями из композиционных материалов.

Литература

1. И.В. Крагельский. Трение и износ. Москва, Машиностроение, 1968.
2. Л.А. Галин. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. Москва, Наука, Гл. редакция физ-мат. лит., 1980 – 304 с.
3. П.П. Усов, В.Д. Данилов. Контактная задача для упругого слоя и жесткого цилиндра при наличии сил трения//Трение и износ.-2007(28), №3, 225-236.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант 06-08-01162а.

¹ *Московский Государственный институт электронной техники. Россия. Москва*

² *Институт машиноведения им.А.А.Благонравова РАН. Россия. Москва.*