УДК 534

# АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ В ПРИСУТСТВИИ ШИРОКОПОЛОСНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

**В.Л.Крупенин**

Изучаются сильно нелинейные динамические эффекты в виброударных автоколебательных системах с одной степенью свободы, образованных двусторонними ограничителями хода и массивным телом, расположенным между ограничителями и вибрирующим в зазоре с соударениями. Если, например, величина зазора – мала, а другие параметры системы - не малы, то, как правило, неучитываемые случайные возмущающих факторов могут оказать на динамику системы существенное влияние. Изучение примеров таких влияний и приводится в работе.

1. Рассмотрим точечное тело массы $m$, находящееся внутри зазора величины $2\Delta$ и совершающее колебания с соударениями (рис.1) со стенками. Предполагая, что колебания происходят вдоль оси $x$, удар прямой и центральный, а возбуждение вибрации происходит за счет автоколебательного механизма типа «кубическое трение» имеем уравнение движения, типа рассмотренного ранее в монографиях [1, 2]:

$$m\ddot{x}+cx-\alpha_1\dot{x}+\beta_1\dot{x}^3=0,\quad \alpha_1,\beta_1>0;\quad \dot{x}_+=-\dot{x}_-,\quad |x|\le\Delta, \tag{1}$$

где с – жесткость пружины, $\alpha, \beta$ - заданные коэффициенты, а удар предполагается центральным и абсолютно упругим, так что соответственно $\dot{x}_+$ и $\dot{x}_-$ - скорости тела непосредственно после и до удара.. Легко переписать уравнение (1) в виде

$$\ddot{x}+\Omega^2\text{x}-\alpha\dot{x}+\beta\dot{x}^3=0,\quad \alpha,\beta>0;\quad \dot{x}_+=-\dot{x}_-, \tag{2}$$

где $\Omega^2$=cm$^{-1}$ – собственная частота линейного осциллятора, а $\alpha$ и $\beta$ - параметры «автоколебательного члена», отнесенные к массе колеблющегося тела. Пусть зазор $\Delta$<<1. В этом случае система оказываются псевдоконсервативной [3] и легко получаются точные решения уравнения (2). Пренебрегая в сравнении с остальными, членом $\Omega^2$x, понизим порядок системы (2). Пусть $z\equiv\dot{x}$. Тогда

$$\dot{z}-\alpha z+\beta z^3=0,\ z_+=-z_-. \tag{3}$$

Отсюда получаем три стационарных решения:

$$z_1=0;\quad z_2=-\sqrt{\alpha/\beta},\ z_3=\sqrt{\alpha/\beta}. \tag{4}$$

В отсутствии ограничителей два нетривиальных решения соответствуют разнонаправленным равномерным движениям рассматриваемого точечного тела, а тривиальное движение – неустойчивому положению равновесия [1, 2]. Ограничители (второе соотношение) (3) «сшивают» решения: $z_2 = z_-$ и $z_3 = z_+$.

Движение между соударениями – равномерное, поэтому период колебаний

$$T = 2\Delta \sqrt{\beta / \alpha}\,. \tag{5}$$

В результате, при переходе к исходной координате $x$ получается хорошо известное [1, 2] «пилообразное» колебательное решение, «амплитуда», которого определяется величиной $0{,}5\sqrt{\alpha / \beta}$ : $x(t)=0{,}5\sqrt{\alpha / \beta}\,(t-0{,}25T)$, причем при такой записи здесь $T\in$ [0, 0,5T[, а далее выражение для x(t) необходимо продолжить на всю числовую ось, исходя из условий периодичности и симметрии: $x(t+T)= x(t)$; $x(t+0{,}5T)= - x(t)$.

2. Рассмотрение задач подобного типа, когда происходит пренебрежение собственной упругостью системы, например, вследствие малости зазора, позволяет изучить их в более общих постановках, например, учесть наличие широкополосных случайных флуктуаций.

Пусть автоколебания осуществляются также при наличии внешней силы, которая может быть описана стандартным белым шумом $\xi(t)$ интенсивности S.

Вместо задачи (2) имеем теперь

$$\ddot{x} + \Omega^2 x - \alpha\,\dot{x} + \beta\,\dot{x}^3 = \xi(t) \quad \alpha, \beta > 0; \quad \dot{x}_+ = -\dot{x}_-, \tag{6}$$

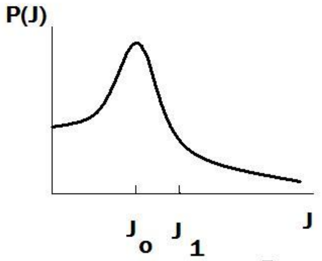

Рис. 1

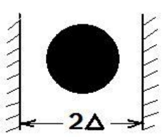

Рис. 2

и положение равновесия здесь снова неустойчиво. Введем новую переменную – (энергию): $E=0{,}5x^2$. Тогда условия удара, входящие в (6) будут выполняться автоматически (удар – абсолютно упругий), а уравнение движения после домножения обеих его частей на $\dot{x}$, примет вид:

$$\dot{E} - 2\alpha E + 4\beta E^2 = \sqrt{2E}\ \xi(t)\,. \qquad (7)$$

Стационарное уравнение ФПК для задачи (7) имеет вид [4]:

$$S\frac{d}{dE}[EP(E)] = (2\alpha E - 4\beta E^3 + 0{,}5\,S)\ P(E)\,, \qquad (8)$$

где $P(E)$ - искомая стационарная плотность вероятностей. Решение уравнения (8) определяется элементарно:

$$P(E) = \frac{2C}{\sqrt{2E}}\exp(2\alpha/_S\, E - 2\beta/_S\, E^2),\ E>0. \qquad (9)$$

Константа С находится из условия нормировки

$$\int_0^\infty P\{E\}dE = 1\,.$$

Принимая во внимание (см. [5]), что

$$\int_0^\infty x^{a-1}exp(-\beta x^2-\gamma x)dx = (2\beta)^{-a/2}\,\Gamma(a)exp(\gamma^2/8\beta\ )D_{-a}(\gamma/\sqrt{2\beta}\,), \qquad (10)$$

где $\Gamma(a)$ – $\Gamma$-функция Эйлера, а $D_{-a}(y)$ – функция параболическая цилиндра [6], получаем после преобразований с учетом свойств означенных специальных функций:

$$C = (4\beta/S)^{0,25}\exp[-\alpha^2/(4\beta S)]\ \{\sqrt{2\pi}\ D_{-0,5}(-\alpha/\sqrt{\beta S}\,)\}^{-1}. \qquad (11)$$

Найденная плотность вероятности определяет точное решение рассматриваемой задачи.

Отсюда можно получить важнейшие характеристики процесса. Для плотности вероятности ударного импульса

$$J=2|\,\dot{x}_-|;\ E=1/8\,J^2 \qquad (12)$$

в соответствии с правилами вычисления плотностей вероятностей детерминированных функций случайных процессов [1, 2], найдем после вычислений:

$$P(J) = C\exp(\frac{\alpha}{4S}J^2 - \frac{\beta}{32S}J^4),\ J \geq 0.$$

Эскиз графика функции $P(J)$ изображен на рис. 2. Отмечены характерные точки: $J_0 = 2\sqrt{\alpha/\beta}$ - мода распределения (производная показателя экспоненты равна нулю) и $J_1 = 2\sqrt{2\alpha/\beta}$ (показатель экспоненты равен нулю). Сравнивая найденное с (4) и (12), видим, что мода отвечает устойчивому стационарному виброударному процессу в соответствующей детерминированной системе.

3. Проведем вычисление числовых характеристик изучемого процесса. При вычислениях оказывается более удобным пользоваться распределением (9), (11).

Определим среднее значение энергии

$$m_E = \int_0^\infty EP(E)dE .$$

Внося сюда (9), находим

$$m_E = 0{,}25\sqrt{S/\beta}\, D_{-3/2}(W)/D_{-1/2}(W);\quad W = -\,\alpha/\sqrt{S\beta} \qquad (13)$$

Точно также, при помощи определяющих формул

$$\mu^{(n)}{}_E = \int_0^\infty (E - m_E)P(E)dE;\quad m^{(n)}{}_E = \int_0^\infty E^n P(E)dE$$

находятся все необходимые центральные или начальные моменты стационарного случайного процесса $E(t)$. Для вычислений целесообразно пользоваться интегралом (10), а также свойствами фигурирующих здесь специальных функций [6].

Исследуем более подробно среднюю энергию системы, описываемую при помощи формулы (13).

Примем, для определенности, некоторые предположения об относительных порядках параметров системы. Пусть $\varepsilon$ - малый параметр и порядки параметров, определяющих «автоколебательный член» $\alpha, \beta = O(\varepsilon)$, в то время как интенсивность белого шума S=O($\varepsilon^2$). В этом случае аргументы функций параболического цилиндра $D_p(-\alpha/\sqrt{S\beta})$ - отрицательны и велики по абсолютной величине: O(W)=$\varepsilon^{-1/2}$, W= $\alpha/\sqrt{S\beta}$ (см. (13)).

Используя известное асимптотическое разложение функций параболического цилиндра [5, 6], которое имеет здесь вид:

$$D_p(x) = C_0 x^{-p-1}\exp(0{,}25x^2) + \ldots,\qquad x \to -\infty ,$$

причем $C_0$ = const.

В числителе первой формулы (13): $p = -2/3$, в знаменателе $p = -½$. Таким образом, в случае когда $\alpha, \beta = O(\varepsilon), S = O(\varepsilon^2)$:

$$D_{-3/2}(W) \sim C_0\exp(1/4\, W^2)(|W|)^{1/2},\ \varepsilon \to 0,$$
$$D_{-1/2}(W) \sim C_0\exp(1/4\, W^2)\,)(|W|)^{-1/2},\ \varepsilon \to 0,$$

где учтено (13). Следовательно, при малых $\varepsilon$:

$$m_E = (\alpha\beta^{-1})\text{const} + \ldots \qquad (14)$$

Этот результат вполне согласуется с найденным (см. выше) выражением для устойчивого стационарного значения импульса удара $J_0 = 2\sqrt{\alpha/\beta}$ , $E_0 = {}^1/_8\, J_0^2$.

Таким образом, при $S = O(\varepsilon^2)$, данную задачу можно решать в детерминированной постановке, так как влияние случайных возмущений не велико.

4. При увеличении уровня случайных возмущений S оказывается необходимым рассчитывать флуктуционную поправку к величине (14).

Для определения ее структуры, положим $\alpha, \beta = O(\varepsilon)$ и не будем делать специальных предположений относительно порядка величины S. В этом случае порядки аргументов функций $D_p(x)$ в (13) будут $\sqrt{\varepsilon}$. Считая далее величину $\varepsilon$ достаточно малой, разложим эти функции в ряд Тейлора и ограничимся линейными членами. Получаем:

$$m_E = 0{,}25\sqrt{S/\beta}\,[A - B\alpha\,(S\beta)^{-1/2}][H - F\alpha\,(S\beta)^{-1/2}]^{-1},$$

где A ,B, H ,F – коэффициенты разложения. При этом $\alpha\,(S\beta)^{-1/2} = O(\varepsilon^{1/2})$. Тогда находим:

$$m_E = 0{,}25\left[\frac{A}{H} + \alpha/\sqrt{S\beta}\left(\frac{AF}{H^2} - \frac{B}{A}\right)\right]\sqrt{S/\beta} + O(\varepsilon),$$

или окончательно с точностью до членов порядка малости $\varepsilon$, вводя новые константы $C_1$ и $C_2$ :

$$C_1 = 0{,}25\frac{A}{H};\ C_2 = 0{,}25(AF/H^2 - B/A),$$

получим

$$m_E = C_1(S/\beta)^{1/2} + C_2\,\alpha/\beta\ . \qquad (15)$$

Величина $C_1(S/\beta)^{1/2}$ и определяет значение искомой поправки. В силу того, что $\beta = O(\varepsilon)$, то в рассматриваемом случае $S = O(1)$, первый член в формуле (15) оказывается доминирующим.

Вычисления коэффициентов $C_1$ и $C_2$ можно провести при помощи приближенных оценок для специальных функций [1,2, 5, 6].

Можно показать, что $C_1 \cong 1/4$, $C_2 \cong 1/8$ .

Получить данные точные решения позволили внесенные упрощения: неучет потерь энергии при ударе и предположение о малости зазора. В дальнейших работах данная задача будет рассмотрена в более реалистической постановке.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект 05-08-50183).*

## Литература

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.-М., Наука, 1985. – 384 с.
2. V.I. Babitsky, V.L. Krupenin Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. –404 p.p.
3. Крупенин В.Л К расчету псевдоконсервативных авторезонансных систем // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1993 г., N2, с. 106-114
4. Стратанович Р.Л. Избранные проблемы теории флуктуаций в радиотехнике, М., «Советское радио», 1961 – 324 с.
5. Градштейн И. С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М.: «Наука». 1971 – 1028 с.
6. Кузнецов Д.С., Специальные функции. М., «Высшая школа», 1965. – 465 с.

*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН (ИМАШ РАН), Москва, Россия.*

*Поступила: 14.07.08.*