

УДК 534.1

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С НЕПОДВИЖНЫМ ОГРАНИЧИТЕЛЕМ

Асташев В.К., Крупенин В.Л.

Приводится решение задачи о продольных колебаниях упругого стержня, взаимодействующего с односторонним ограничителем. Методами частотно временного анализа получены точные решения, описывающие свободные и вынужденные колебания. Построены частотные характеристики системы. Дается сравнение найденных точных и полученных ранее приближенных решений.

Задачи расчета систематических соударяющихся своими торцами стержней с неподвижными препятствиями возникают при расчетах разнообразных элементов машинных конструкций и, в частности, при анализе динамики ультразвуковых технологических машин [1,2]. Главные динамические эффекты, проявляющиеся в такой системе, рассмотрены в [3,4]. Используемые в цитируемых работах методы расчета, основанные на идеях эквивалентной линеаризации, позволили не только провести первоначальное теоретическое исследование системы, но и получить соотношения, необходимые для осуществления реальных машин. Однако, круг вопросов, связанных со свойствами законов движения системы, остался не исследованным и будет, по крайней мере, частично рассмотрен ниже.

Пользуясь методами теории виброударных систем с распределенными ударными элементами [5-8], рассмотрим задачу о взаимодействии продольно колеблющегося под действием внешних сил стержня, выполненного из вязкоупругого материала.

1. Будем предполагать, что способы измерения независимых переменных x и t , определяющие искомое перемещение сечений стержня $u(x, t)$ выбраны так, что линейная плотность стержня, а также величина ES (E и S – соответственно модуль упругости материала стержня и площадь его сечения) равны единице. Тогда, при выбранных способах измерения, единичной оказывается и скорость звука в материале стержня. Без ограничения общности, можно считать координаты концов стержня, находящегося в статическом состоянии равными $x=0$ и $x=1/2$. Исследуемую модель запишем в виде уравнения движения и граничных условий (рис.1):

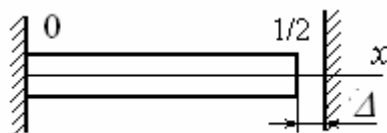


Рис. 1

$$\square u - \Phi(u) = \varepsilon H(t, x, u_t, u_x, \dots), \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(1/2, t) = 0,$$

где $u = u(x, t)$ - перемещение сечения x стержня в момент времени t ;

$\square u \equiv u_{tt} - u_{xx}$ - оператор Д'Аламбера; ε - малый параметр; H - нелинейная T -периодическая функция времени, зависящая как от независимых переменных, так и от высших частных производных перемещения. Предполагается, что гладкость функции H обеспечивает существование и единственность решения хотя бы в обобщенном смысле [5]. Функция H , в частности, может моделировать присоединенный к концу стержня инструмент и обрабатываемую среду при расчете ультразвуковой технологической машины.

Функция $\Phi(u)$ в уравнении (1) описывает силу взаимодействия свободного конца стержня с неподвижным ограничителем (например, обрабатываемой поверхностью). Пусть взаимодействие осуществляется при $u(1/2, t) = \Delta$. Если $\Delta > 0$, имеем систему с зазором, при $\Delta < 0$ - с натягом. Таким образом, при всех t

$$u(1/2, t) \leq \Delta. \quad (2)$$

При возникновении контакта стержня с ограничителем его концевое сечение $x = 1/2$ будет некоторое время покоиться, находясь в контакте с ограничителем. При этом в неравенстве (2) реализуется равенство. Если t_k - момент начала k -го взаимодействия, а θ_k - его окончание, то равенство в (2) реализуется при $t \in [t_k, \theta_k]$, и поэтому

$$\Phi[u(1/2, t)] = \sum_k R_k(t) \delta(x - 1/2) [\eta(t - t_k) - \eta(t - \theta_k)], \quad (3)$$

где $k = 1, 2, \dots$ - целые числа; $\delta(x)$ и $\eta(t)$ - функции Дирака и Хевисайда;

$$R_k(t) = u_x(1/2, t) \leq 0, \quad t \in [t_k, \theta_k] - \quad (4)$$

- сила реакции ограничителя.

Наличие выстоек контактирующего сечения стержня приводит к парадоксальной для традиционной теории удара, использующей предположение о мгновенном отскоке ударника, ситуации. Оказывается, что при ударе энергия не теряется, но он, тем не менее, оказывается подобным абсолютно неупругому.

При реализации в (2) строгого неравенства, в соотношении (4) реализуется равенство, и контакт прекращается. Таким образом, действие ограничителя равносильно возникновению систематических прижимов к нему конца стержня.

Уравнение (1) - суть нелинейное уравнение Клейна-Гордона. В предположении периодичности процесса, обозначим здесь и далее T - период стационарной стоячей волны, устанавливающейся в случае нелинейных периодических колебаний. В соответствии с методами частотно - временного анализа виброударных процессов, запишем интегральное уравнение процесса в виде [8,9]:

$$u(x, t) = \int_0^{T/2} \int_0^T \chi(x, z, t - s) \{ \Phi[u(z, s)] + \varepsilon H(s, x, u_t, u_x, \dots) \} dz ds, \quad (5)$$

где

$$\chi(x, z, t) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)\pi x] \sin[(2k+1)\pi z] \chi_{2k+1}(t) - \quad (6)$$

T-периодическая функция Грина (ПФГ) стержня с граничными условиями (1), причем функции

$$\chi_{2k+1}(t) = T^{-1} \left\{ \left[(2k+1)\pi \right]^{-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2k+1)^2 \pi^2 - (2n+1)^2 \omega^2 \right]^{-1} \cos(2k+1)\omega t \right\} -$$

ПФГ линейных осцилляторов с собственными частотами стержня $\Omega_k = (2k+1)\pi$; $\omega = 2\pi T^{-1}$.

2. Для реализации общих схем приближенного изучения резонансных режимов, разработанных в [8-10], рассмотрим вырожденную консервативную модель. Для этого положим в (1) $\varepsilon=0$. Поставим начальные условия в виде

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad (7)$$

причем для простоты ограничим рассмотрения начальными условиями, обеспечивающие в линейном случае стоячие волны, близкие к первой форме линейных колебаний (кривая 1 на рис.2,а). Поэтому предположим, что функция $u_0(x)$ в (7) имеет единственный максимум на границе отрезка $[0, 1/2]$ при $x = 1/2$.

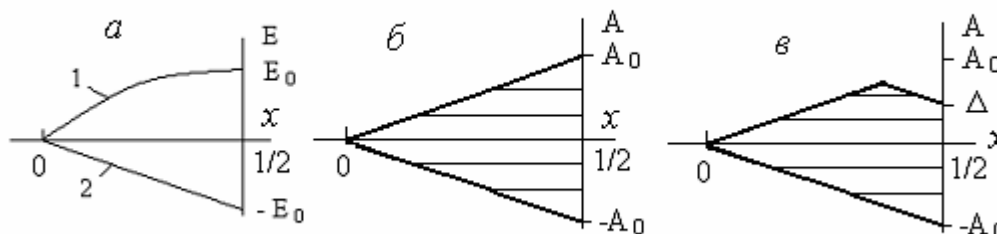


Рис. 2

Далее в этом пункте рассматривается один принципиальный пример. Пусть $u_0(x) \equiv A_0(x) = -2E_0x$ (линия 2 на рис.2,а). Очевидно, параметр $E_0 \geq 0$ однозначно определяет полную энергию системы. Обозначим искомое решение $A(x, t)$.

В линейном случае эпюры перемещений (профили стоячей волны) в любые моменты времени будут иметь трапециевидальный вид (рис.2,б) за исключением моментов времени $t = 1/2 nT_0 = n$ ($n=0,1,2,\dots$; $T_0=2$ – период свободных колебаний стержня), где трапеции вырождаются в треугольники. Свободное сечение стержня движется с постоянной по величине скоростью $v = 2D_0$, которая через каждые полпериода меняет направление в моменты наибольших деформаций стержня.

При наличии ограничителя в моменты времени $t = t_k = t_1 + kT$, когда выполняется равенство $A(0, t_k) = \Delta$, свободное сечение $x = \frac{1}{2}$ стержня достигает ограничителя, мгновенно останавливается, и некоторое время остается в контакте с ограничителем. В течение удара профиль волны $A(x, t)$ образует зубец (рис.2,в). В крайнем положении расположенная слева от вершины зубца часть стержня растянута, а левая - сжата. Затем волна движется в обратном направлении, и остановка сечения прекращается в моменты $\theta_k = \theta_1 + kT$. Моменты начала и окончания удара и период колебаний при естественном предположении $E_0 > |\Delta|$ определяются равенствами

$$t_1 = (E_0 + \Delta) / 2E_0, \quad \theta_1 = 1, \quad T = (3E_0 + \Delta) / 2E_0. \quad (8)$$

Внося (6) и (8) в (5), найдем

$$A(E_0, x, t) = 2E_0 \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t^*; \omega, t) \sin[(2k+1)\pi x], \quad (9)$$

где $t^* = (t_2 - t_1) = 1 - t_1$ - время удара; $D_k(t^*; \omega, t) = t^* \left[T(2k+1)^2 \pi t_1^2 \right]^{-1} + 2T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)\omega]^{-2} \left[(2k+1)^2 \pi^2 - (2n+1)^2 \omega^2 \right]^{-1} \cos n\omega t$.

Решение A_0 можно использовать в качестве порождающего при исследовании резонансных процессов. Однако оно отвечает начальным условиям специального вида и на первый взгляд не может претендовать на надлежащую общность. Пользуясь результатами работ [5. 6. 10], установим, что данное решение, полученное для начальных условий, в определенном смысле подобным порождающим первую форму линейных колебаний, обладает качествами, пригодными для анализа резонансных стоячих волн.

3. Будем искать решение нелинейной задачи с начальными условиями, имеющими единственный экстремум при $x=0$, в виде

$$u(x, t) = A_0 [z(x, t), \tau(x, t)]; \quad E_0 = 1, \quad (10)$$

где A_0 – построенное в п.2 решение; z и τ - новые переменные.

Рассматривая по-прежнему консервативную задачу, внесем (10) в (1) при $\varepsilon = 0$ и после преобразований придем к выражению

$$(\tau_t^2 - \tau_x^2) A_{0\tau\tau} - (z_x^2 - z_t^2) A_{0zz} + (z_{tt} - z_{xx}) A_{0z} + (\tau_{tt} - \tau_{xx}) A_{0\tau} - \Phi[A_0(z, \tau)] = 0,$$

где дифференцирование, вообще говоря, понимается в смысле обобщенных функций.

Требую, чтобы преобразованное таким образом уравнение движения сохраняло свою структуру, наложим на функции z и τ ограничения, положив

$$z(x, t) = g(x-t) + g(x+t), \quad \tau(x, \tau) = g(x-t) - g(x+t). \quad (11)$$

Тогда получаем

$$2g'(x-t)g'(x+t)[A_{0\tau\tau} - A_{0zz}] - \Phi[A_0(z, \tau)] = 0. \quad (12)$$

В силу (3), (4) $\Phi > 0$ и из формулы (11) следует, что введенная функция g должна быть монотонной; из дальнейшего станет видно, что ее следует выбрать монотонно возрастающей, т.е. $g' > 0$ на всей числовой оси. Выберем эту функцию, исходя из вида

начального условия $u_0(x)$, определенного вначале на отрезке $[0, 1/2]$. Так как $u_0(x) = A_0[z(x,0), 0] = -2x = 4|g(x)| - 1$, то можно положить, доопределяя функцию $g(x)$ антисимметрично на отрезке $[1/2, 1]$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}[1 + u_0(x)] & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}[1 + u_0(x)] & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, $g(x)$ – нечетная возрастающая на отрезке $[-1/2, 1/2]$ функция. Доопределим ее на всю числовую ось при помощи двух равенств

$$g(x+1) = \frac{1}{2} + g(x), \quad g(-x) = -\frac{1}{2} - g(x). \quad (14)$$

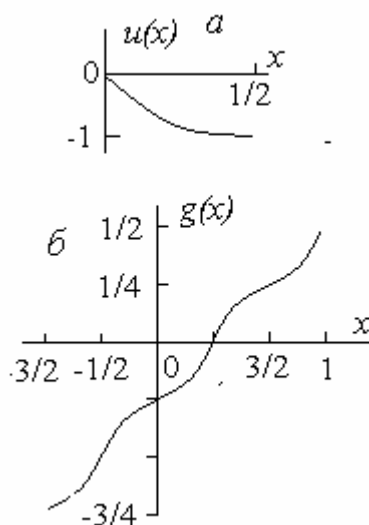


Рис. 3

На рис.3 показаны графики возможной начальной конфигурации волны (рис.3,а) и отвечающей ей функции $g(x)$ (рис.3,б). Из (14) и (11) следует, что $z(x,t) \in [0, 1]$ и $z(x, t+2) = z(x, t)$, т.е. функция z имеет период, совпадающий с периодом свободных колебаний линейного стержня ($T_0 = 2$). В то же время $\tau(x, t+2) = \tau(x, t) + 2$

Установим, что представление (10) отвечает исходной задаче. Так как ограничитель действует на стержень только при его выходе на ограничитель в единственной точке $x = 1/2$,

то представление решения, во-первых, должно удовлетворять волновому уравнению. Из (12) следует, что если $A_0(x, t)$ – решение волнового уравнения, то и $A_0[g(x-t) + g(x+t), g(x-t) - g(x+t)]$ – также решение волнового уравнения. Во-вторых, должно выполняться неравенство (2), но так как A_0 – решение рассматриваемой консервативной задачи, а функция $g(x)$ – антисимметрична относительно $x = \frac{1}{2}$, то $u(x, t) = A_0[0, 2g(t)] \leq \Delta$, и указанное неравенство действительно выполняется. В-третьих, должно иметь место неравенство (4). Ввиду того, что для волны A_0 на протяжении всего времени выстоя стержня на ограничителе $R_0 = A_{0,x}(+0) = 2$, учитывая возрастание функции g , в соответствии с (10) находим $R_0 = 4g'(t) > 0$.

Таким образом, представление (10) действительно определяет искомый процесс. Поэтому с помощью формулы (9) при $E_0 = 1$, $t_1 = \frac{1}{2}(1 + \Delta)$ найдем

$$u(x, t) = 8 \sum_{k=1}^{\infty} D_{2k+1}[(\omega; \tau(x, t))] \sin\{(2k+1)\pi[z(x, t) + \frac{1}{2}]\}. \quad (15)$$

Периоды функций D_{2k+1} по τ равны $T_\tau = (3 + \Delta)/2$. Одновременно $z(x, t + 2) = z(x, t)$, $\tau(x, t + 2) = \tau(x, t) + 2$. Поэтому периодичность стоячей волны (15) оказывается возможной только, когда числа $T_0 = 2$ и Δ численно несоизмеримы. Это, в свою очередь, возможно лишь в случае, когда значение Δ является рациональным числом; при иррациональных значениях величины зазора формула (15) определяет почти-периодический процесс [3, 4, 10].

Таким образом, $\{A_0(E_0, x, t)\}$ – единственное семейство периодических стоячих волн, слабо чувствительных к изменению значения зазора (натяга). Факт потери периодичности процесса при переходе от значения, дающегося рациональным числом, к иррациональному значению означает практическую невозможность установления периодического режима других типов. Поэтому представляется естественным предположение о том, что резонансный периодический режим, устанавливающийся в исходной системе при $\varepsilon \neq 0$, описывается при помощи элементов семейства $\{A_0(E_0, x, t)\}$.

4. Рассмотрим вначале частотные свойства режимов (15) $A_0(E_0, x, t)$. Учитывая, что $T = 2\pi/\omega$, где ω – частота процесса, разрешим третье соотношение (8) относительно $E_0(\omega) > 0$. После преобразований получим

$$E_0(\omega) = \Delta\omega(4\pi - 3\omega)^{-1} \quad (16)$$

На рис.4 показаны графики зависимости (16) при различных величинах зазора. Для систем с зазором ($\Delta > 0$) имеет место жесткий анизохронизм, и могут существовать волны лишь с частотами $\pi < \omega < \frac{4}{3}\pi$. При $\Delta = 0$ частота $\omega = \frac{4}{3}\pi$, и имеет место изохронизм движения. Наконец, для систем с натягом $\Delta < 0$ имеет место мягкий анизохронизм и $\frac{4}{3}\pi < \omega < 2\pi$. Частота $\omega = \pi$ отвечает линейным колебаниям с касанием ограничителя, происходящим при $\Delta > 0$ и $E_0 = \Delta$. Частота $\omega = 2\pi$ отвечает собственным колебаниям прижатого к ограничителю стержня при $\Delta < 0$ и $E_0 < \Delta$. Приведенные кривые являются энергетическими аналогами скелетных кривых в теории нелинейных колебаний. При $\Delta > 0$ скелетная кривая дополнена вертикальным отрезком $\omega = \pi$, отвечающим свободным

колебаниям свободного конца стержня в пределах зазора при $E_0 < \Delta$.

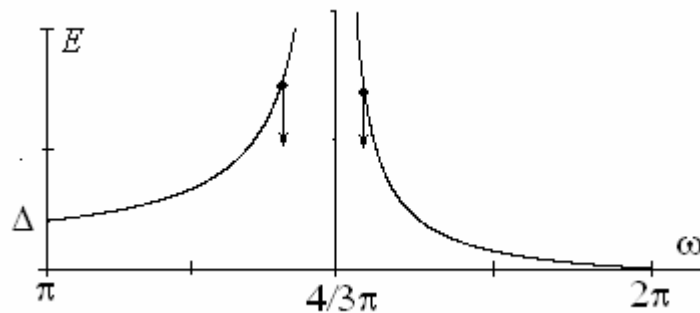


Рис. 4

Имея в виду замечание, приведенное в конце п.3. будем искать резонансные режимы движения, описываемые при помощи семейства $\{A_0(E_0, x, t)\}$. Предположим $\Delta \neq 0$, и для определенности будем полагать, что в уравнении движения (1) $\varepsilon H(t, x, u_b, u_x, \dots) = \varepsilon [P(x, t) - 2bu]$.

Пусть сила возбуждения

$$P(x, t) = P(x) \cos(\omega_1 t + \psi) = \sum_{m=1}^{\infty} P_m \sin m\pi x \sin \pi x \cos(\omega_1 t + \psi). \quad (17)$$

При этом предполагается, что начало отсчета времени совпадает с началом какого-либо взаимодействия стержня и ограничителя, а фаза ψ - неизвестна. Полученная выше зависимость $E_0(\omega)$ и приведенные ее свойства позволяют сделать вывод о том, что резонансные режимы типа $u(x, t) \approx A_0(E_0, x, t) + \dots$, где $E_1 = E_0(\omega) = \Delta \omega (4\pi - 3\omega)^{-1}$, могут существовать при $\Delta > 0$ только в частотном диапазоне $\pi < \omega < 4/3 \pi$, а при $\Delta < 0$ - только в частотном диапазоне $4/3 \pi < \omega < 2\pi$. Изохронизм движения не рассматривается.

Для приближенного описания резонансных стоячих волн близких (при малых ε) к волнам $\{A_0(E_1, x, t)\}$, воспользуемся, как обычно [4,5,8-10], принципом энергетического баланса, в соответствии с которым при реализации T_1 -периодического процесса, например, $u(x, t)$, поддерживаемого T_1 -периодической силой (17) за период движения должны сбалансироваться работы сил возбуждения и диссипации, т.е.

$$\int_0^T P(x) \cos(\omega_1 t + \psi) u_t(x, t) dt = \int_0^T 2bu_t^2(x, t) dt. \quad (18)$$

Для определения неизвестной фазы ψ выполним необходимые подстановки переменных в уравнение (17). Имеем:

$$\sin \psi \sum_{k=1}^{\infty} P_k \frac{\sin(\omega t_1 / 2)}{k^2 (\pi^2 - \omega_1^2)} = 16bE_1 (\pi \omega_1)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega t_1 / 2)}{(m^2 \pi^2 - n^2 \omega^2)^2}. \quad (19)$$

Здесь и в (15) $m = 2q + 1$. Обозначая правую часть (19) $bE_1 Y(\omega_1)$ и ограничиваясь случаем $P(x, t) = P_1 \sin \pi x \cos(\omega_1 t + \psi)$, получим два возможных значения фазы и условие

существования резонансных режимов движения ($|\sin\psi| \leq 1$)

$$\psi_1 = \arcsin \left[bP_1^{-1} E_1 \left| Y(\omega_1) (\pi^2 - \omega_1^2) \sin^{-1}(\omega_1 t_1 / 2) \right| \right], \quad \psi_2 = \pi - \psi_1;$$

$$bE_1 \left| Y(\omega_1) (\pi^2 - \omega_1^2) \right| \leq P_1 \left| \sin(\omega_1 t_1 / 2) \right|.$$

Анализ последнего неравенства показывает, что при $\omega_1 \rightarrow \pi/3$ $\pi \pm 0$ (знаки «+» и «-») отвечают соответственно неравенствам $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$ $|Y(\omega_1)| \rightarrow \infty$ ($1/2 \omega_1 t_1 \rightarrow \pi/3$). На рис.4 точками отмечены границы области существования, где выполняются равенства в условии существования. Очевидно, что в этих точках, расположенных в окрестности «предельной частоты» $\omega = \pi/3$ происходят срывы колебаний, как это показано вертикальными стрелками на рис.4. Найденная выше зависимость (16) и рис.4 показывают также возможность проявления здесь известных в традиционной теории виброударных систем [8-10] явления затягивания по частоте.

Заметим, что, если $\Delta < 0$ и $\omega_1 \rightarrow \pi$, время взаимодействия стержня и ограничителя $t_1 \rightarrow 0$, стержень совершает линейные колебания в пределах зазора, не касаясь ограничителя. Если $\Delta > 0$ и $\omega_1 \rightarrow 2\pi$ (период колебаний $T_1=1$), время взаимодействия $t_1 \rightarrow T_1=1$, и стержень совершает колебания без отрывов от ограничителя такие же как стержень с обоими закрепленными концами.

Отметим кроме того, что если при $\Delta < 0$ изначально покоящийся стержень установлен с натягом, так что $u_0(x) = 2\Delta x$, то для получения резонансных колебаний рассматриваемого типа его необходимо предварительно отвести от ограничителя, т.е. осуществить жесткий запуск стоячей волны [2, 6, 10, 11]. Наконец, легко показать, что, как и в традиционных виброударных системах [6, 8-10], здесь оказывается возможным реализовать затягивание резонансных колебаний по амплитуде. Указанные нелинейные эффекты неоднократно наблюдались в натуральных и численных экспериментах [2, 6, 10, 11].

Таким образом, найденные режимы, как и режимы трапециевидных стоячих волн в системах с распределенными ударными элементами [5-7, 10, 11], дают возможность провести аналогию между достаточно сложной рассматриваемой системой и элементарной виброударной системой типа «ударный осциллятор» [7-10].

5. В заключение отметим, что полученное выше решение нелинейной задачи является точным. Поэтому мы имеем редкую возможность сравнить результаты точного и полученного ранее в [1] приближенного решений. Проведем сравнение, сопоставив частотные характеристики свободных колебаний. Для удобства запишем результаты полученного выше решения в размерной форме.

Положим, что длина стержня равна l . Тогда период свободных колебаний стержня с одним свободным и вторым закрепленным концом $T_0 = 4l/c$, а его первая собственная частота $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi c/2l$, где c – скорость звука в материале стержня. По аналогии с рис 3,а примем, что стержень предварительно сжат, причем начальное смещение свободного конца равно $A > |\Delta|$. Тогда амплитуда его колебаний с соударениями об ограничитель

$$a = (A + \Delta)/2, \tag{20}$$

период колебаний $T = (3 + \Delta/A)T_0/4$, а частота колебаний

$$\omega = 4\omega_0 / (3 + \Delta/A). \tag{21}$$

Из условия $A > |\Delta|$ следует, что частота колебаний с соударениями $\omega > \omega_0$. Из (21) и

(20) найдем следующую зависимость частоты от амплитуды колебаний

$$\omega = \omega_0 \frac{4 - 2\Delta/a}{3 - \Delta/a}. \quad (22)$$

Обратная (22) функция определяет скелетную кривую

$$a = \Delta \frac{2 - \omega/\omega_0}{4 - 3\omega/\omega_0} \quad (23)$$

Из (22), (23) легко найти области существования скелетных кривых, которые совпадают с полученными в п.4 (см. рис.4). Скелетные кривые, построенные по формуле (23), показаны на рис.5 сплошными линиями.

В [1] при решении той же задачи методом гармонической линеаризации получена следующая зависимость для скелетных кривых:

$$a = 4\Delta \left(\pi \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi\omega}{2\omega_0} + 4 \right) \quad (24)$$

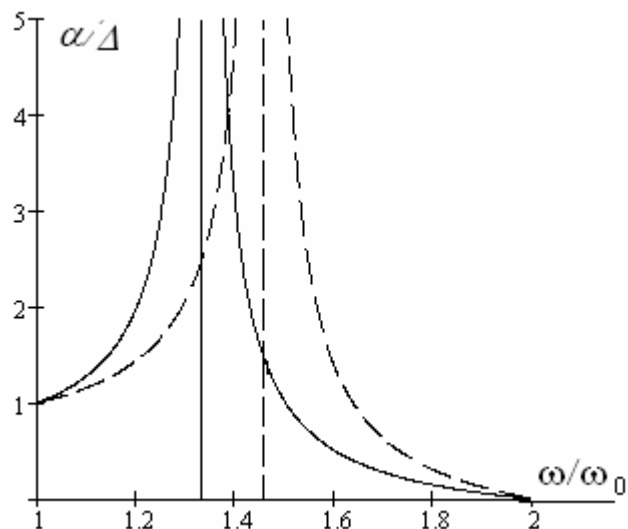


Рис. 5

Скелетные кривые, построенные по формуле (24), показаны на рис.5 штриховыми линиями. Асимптоты скелетных кривых находятся решением уравнения

$\pi \frac{\omega}{\omega_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi\omega}{2\omega_0} + 4 = 0$, которое дает следующее значение частоты изохронных колебаний при $\Delta = 0$.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект 05-08-50183)

Литература

1. Асташев В.К. Нелинейные эффекты в ультразвуковых технологических системах // Труды XXVIII Летней школы «Актуальные проблемы механики». Т. 2. Санкт-Петербург. 2001. С.368-380.
2. Асташев В.К., Бабицкий В.И. Резонансные колебания вязкоупругого стержня с ограничителем // Изв. АН СССР. МТТ. 1972. № 4. С. 176–182.
3. Асташев В.К. Настройка ультразвуковых станков под нагрузкой // Станки и инструмент. 1972. №10. С. 32 – 34.
4. Асташев В.К., Бабицкий В.И. Эффективность резонансной настройки систем для ультразвуковой обработки // Машиноведение. 1981. № 6. С. 3–9.
5. Cabbanes H., Haraus A. Mouvements presque – periodiques d’une corde vibrante en Presence d’un obstacle fixe, rectiligne ou ponctuel // I.J. Non-linear Mecanics. 1981.V. 55. №5/6. P. 449-457.
6. Крупенин В.Л. К расчету резонансных колебаний гибкой нити, взаимодействующей с точечным ограничителем хода // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992 .№2. С. 29-36.
7. Крупенин В.Л. К теории виброударных систем с распределенными ударными элементами // Изв. АН СССР. МТТ, 1985, №1. С. 25-32.
8. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах. М.: Наука. 1985. 384 с.
9. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag. 2001. 404 p.
10. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Волны в распределенных и дискретных виброударных системах и сильно нелинейных средах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998. № 5. С. 13-30.
11. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Экспериментальное исследование колебаний струн, взаимодействующих с точечными ограничителями // Доклады Академии Наук. 2001. Т. 379. №3. С. 329-333

Институт машиноведения РАН, Москва, Россия

Поступила: 20.03.08.