

УДК 534.1

## О РАЗВИТИИ МЕТОДОВ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ РАСЧЕТА СОСТАВНЫХ СИСТЕМ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ УДАРНЫХ ПАР

В.Л. Крупенин

Изучаются динамические системы, составленные из большого числа вязко – упругих систем простой структуры с произвольным числом степеней свободы. Предполагается, что данная составная система содержит ряд зазоров (предварительных натягов), присутствие которых может вызывать развитие виброударных режимов движения. Строится обобщение методик частотно – временного анализа виброударных процессов, пригодное для исследования указанных систем. Выводятся общие определяющие операторные соотношения, приводятся примеры расчета.

1. Операторные уравнения движения. Рассмотрим семейство стационарных склерономных линейных упруго-вязких систем с полной диссипацией энергии, обозначаемое далее  $A = \{A_0; A_1, \dots, A_N\}$  (рис.1). Каждой из систем  $A_r$  семейства  $A$  отвечает поле перемещений  $u_r(x_r, t) \in \mathbf{R}^3$ , причем вектора  $x_r \in \mathbf{X}_r \subset \mathbf{R}^3$  - суть векторные координаты точек систем  $A_r$ ;  $t \in \mathbf{R}$ ;  $r=0, 1, \dots, N$ .

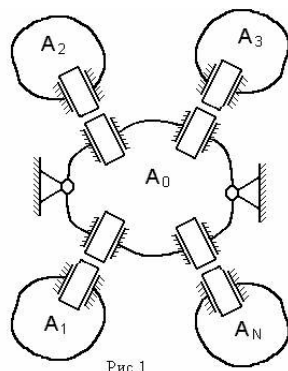


Рис.1

Динамика всех членов семейства  $A$  определяется системами матричных операторов динамической податливости [1-3]  $L^{(r)}(y_r, x_r; p)$ , где  $p$  - оператор дифференцирования. Указанные операторы имеют размерность  $[3 \times 3]$  и ставят в соответствие силовым полям  $f_r(x_r, t)$  [ $x_r \in \mathbf{X}_r$ ] поля перемещений

$$u_r(x_r, t) = L^{(r)}(y_r, x_r; p) f_r(y_r, t). \quad (1)$$

Физический смысл каждой компоненты симметричной матрицы  $L^{(r)}(y_r, x_r; p) = \|L^{(r)}_{kl}\|$  ( $k, l=1, 2, 3$ ) следующий.

Скалярный оператор  $L^{(r)}_{kl}(y_r, x_r; p)$  ставит в соответствие  $k$ -й компоненте распределения силы  $\mathbf{f}(f_{kr}(y_r, t))$   $l$ -ю компоненту перемещения  $u_{lr}(x_r, t)$ .

Каждый оператор  $L^{(r)}$  является, вообще говоря, интегро-дифференциальным оператором и строится либо при посредстве исходной системы уравнений движения и необходимых дополнительных (например, граничных) условий, либо - на основании обработки экспериментальных данных [4].

Отметим, что присутствие нелинейных сил обращает представление (1) в нелинейное операторное уравнение.

Предположим теперь, что каждая из систем  $A_r$  ( $r=1, \dots, N$ ) соударяется с системой  $A_0$  следующим образом.

Пусть при  $x_r=x_{r0}$  в каждой из систем  $A_r$  сосредоточено по одному включению, содержащему точечные тела с сосредоточенными массами  $m_{r0}$ , и в то же время система  $A_0$  содержит  $N$  подобных включений при  $x_0=x_{0r}$ , в которых сосредоточены точечные тела с массами  $m_{0r}$ ;  $r=1, \dots, N$ . Пусть далее тела с массами  $m_{r0}$  могут соударяться с телами, обладающими массами  $m_{0r}$  соответственно, так что объединенная система (семейство)  $A$  содержит  $N$  сосредоточенных ударных пар. Введем относительные координаты [1-3]

$$\mathbf{u}_r(t) = \mathbf{u}_0(x_{0r}, t) - \mathbf{u}_r(x_{r0}, t). \quad (2)$$

и обозначим  $\Phi_r[\mathbf{u}_r(t), \mathbf{u}_{rt}(t)]$  силу удара в  $r$ -й ударной паре; нижняя индексация по времени  $t$  обозначает дифференцирование. Тогда можно записать систему из  $(N+1)$ -го операторного уравнения движения объединенной виброударной системы  $A$  (ср. [1, 2]):

$$\mathbf{u}_0(x_0, t) = L^{(0)}(y_0, x_0; p) \{ \mathbf{f}_0(y_0, t) - \sum_{r=1}^N \Phi_r[\mathbf{u}_r(t), \mathbf{u}_{rt}(t)] \delta(y_0 - x_{0r}) \}; \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_r(x_r, t) = L^{(r)}(y_r, x_r; p) \{ \mathbf{f}_r(y_r, t) + \Phi_r[\mathbf{u}_r(t), \mathbf{u}_{rt}(t)] \delta(y_r - x_{r0}) \},$$

где  $\delta(x)$  -  $\delta$ -функция Дирака;  $r=1, \dots, N$ . При помощи (2) можно понизить размерность анализируемой системы. Проведя  $N$  вычитаний второго уравнения (3) из первого уравнения (3), получаем для относительных координат (2) при  $r=1, \dots, N$

$$\mathbf{u}_r(t) = U_{r0}(t) - L^{(0)}(x_{0r}, x_0; p) \sum_{r=1}^N \Phi_r[\mathbf{u}_r(t), \mathbf{u}_{rt}(t)] - L^{(r)}(x_{r0}, x_r; p) \Phi_r[\mathbf{u}_r(t), \mathbf{u}_{rt}(t)] \quad (4)$$

где обозначено:  $U_{r0}(t) = L^{(0)}(y_0, x_0; p) \mathbf{f}(y_0, t) - L^{(r)}(y_r, x_r; p) \mathbf{f}(y_r, t)$  - изменение относительных координат (2) в отсутствие ударов и введены операторы

$$L_k(0, r)(p) = L^{(0)}(x_{0r}, x_0; p); \quad L_{0r}(p) = L^{(0)}(x_{0r}, x_0; p) + L^{(r)}(x_{r0}, x_r; p).$$

Таким образом соотношения (3) можно для удобства переписать и так:

$$\mathbf{u}_r(t) = U_{r0}(t) - L_{0r}(p) \Phi_r[\mathbf{u}_r(t), \mathbf{u}_{rt}(t)] - L^{(0)}(x_{0r}, x_0; p) \sum \Phi_k[\mathbf{u}_k(t), \mathbf{u}_{kt}(t)], \quad (5)$$

причем суммирование осуществляется при  $k \neq r$ .

Выведенные соотношения - весьма общи, так как описывают поведение представительного класса линейных между ударами систем. Если необходимые системы операторов динамической податливости и распределения внешних сил заданы, а гипотеза удара, определяющая функции  $\Phi_k$  - конкретизирована, то, найдя из системы уравнений (4) представления относительных координат  $\mathbf{u}_{r0}$ , можно при помощи соотношений (3) найти перемещения любой точки семейства  $\mathbf{A}$ .

2. Периодические колебания. Дальнейшие рассмотрения касаются, в основном, свободных или вынужденных периодических колебаний в семействе систем  $\mathbf{A}$ .

Будем предполагать, что все внешние силы - периодические, с периодом  $T_1$ :  $\mathbf{f}_0(\mathbf{y}_0, t+T_1) = \mathbf{f}_0(\mathbf{y}_0, t)$ ;  $\mathbf{f}_r(\mathbf{y}_r, t+T_1) = \mathbf{f}_r(\mathbf{y}_r, t)$ . Ниже будем ограничиваться, в основном, описанием  $T$ -периодических виброударных процессов того же периода:  $T = T_1$ . Используемые далее методы частотно-временного анализа [1, 2, 4] позволяют найти и более сложные типы искомым периодических движений (см. ниже).

Методы частотно-временного анализа основаны, в частности на широком использовании представлений искомым движений через так называемые периодические функции Грина (ПФГ), которые однозначно определяются операторами динамической податливости. Например, ПФГ  $\chi_{0r}(t)$ , отвечающая оператору  $L_{0r}(p)$  и, зависящая, вообще говоря и от пространственных переменных [см.(2)-(5)], записывается так посредством следующего ряда Фурье:

$$\chi_{0r}(\mathbf{y}_r, \mathbf{x}_r; t) = T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_{0r}(in\omega) \exp(in\omega t). \quad (6)$$

Для отыскания периодических режимов перейдем от системы операторных уравнений (5) к системе интегральных уравнений периодических колебаний [1, 2, 6]. Пользуясь общими приемами методов частотно-временного анализа, имеем вместо (5):

$$\mathbf{u}_r(t) = \mathbf{U}_{r0}(t) - \int_0^T \chi_{0r}(t-s) \Phi_r[\mathbf{u}_r(s), \mathbf{u}_{rt}(s)] ds - \int_0^T \chi^{(0)}(\mathbf{x}_{0r}, \mathbf{x}_0; t-s) \sum \Phi_k[\mathbf{u}_k(s), \mathbf{u}_{kt}(s)] ds, \quad (7)$$

где суммирование осуществляется при  $k \neq r$ ; ПФГ  $\chi^{(0)}(\mathbf{x}_{0r}, \mathbf{x}_0; t-s)$  дается рядом Фурье типа (6).

Для дальнейшего анализа обратимся теперь к используемым гипотезам удара. При этом примем ряд предположений.

Анализ задач такого рода возможен в общем случае только численный. Имея в виду продемонстрировать получение достаточно содержательных и в то же время легко интерпретируемых аналитических решений, откажемся, во-первых от предположения о том, что координаты точек и поля перемещений - суть векторные величины, т.е. предположим, что все координаты изменяются вдоль некоторых осей. Во-вторых, ограничимся изучением случая прямого центрального ньютоновского удара во всех  $N$  ударных парах. Таким образом, если, например,

удар в некоторой  $k$ -й ударной паре происходит при  $t=t_\alpha$ , то в соответствии с [1, 2, 6] можно записать:

$$\Phi_k[u_k(t), u_{kt}(t)]|_{t=t_\alpha} = J_{\alpha k} \delta(t-t_\alpha); \quad u_k(t_\alpha) = \Delta_k; \quad J_{\alpha k} = (1+R_k)m_k u_{kt}(t_\alpha-0) \geq 0, \quad (8)$$

где обозначено:  $\Delta_k \geq 0$  - величины установочных зазоров или (при  $\Delta_k < 0$  - натягов); величина  $J_{\alpha k}$  - значение ударного импульса во время  $\alpha$ -го удара, произошедшего в момент времени  $t_\alpha$  в некоторой  $k$ -й ударной паре; величины  $R_k$  и  $m_k$  - значения коэффициента восстановления и некоторой, вообще говоря, приведенной массы ударной пары;  $\delta(t)$  -  $\delta$ -функция Дирака.

Пусть необходимо найти  $T$ -периодический виброударный процесс, где  $T$  - некоторый период. Обычно величина  $T$  связана с периодом внешнего воздействия  $T_1$  соотношениями типа  $qT_1 = pT$ , где  $q$  и  $p$  - натуральные числа [1, 2] (случаи периодических процессов при непериодических внешних воздействиях, как правило, не рассматриваются). В этом случае удары следуют через равные промежутки времени и вместо первого соотношения (7) можно записать, используя периодическую  $\delta$ -функцию  $\delta^T(t)$ ,

$$\Phi_k[u_k(t), u_{kt}(t)] = J_k \delta^T(t-t_k); \quad (9)$$

где  $t_k$  - фиксированный момент удара, причем  $t_k \in [0, T]$ . По определению [1, 2]

$$\delta^T(t) = T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\omega t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta^T(t-qT).$$

Учитывая сказанное, принимая, как отмечалось сейчас  $T=T_1$ , и переходя в (6) к скалярным величинам получаем, внося (8) в (6) следующее представление для семейства  $T$ -периодических виброударных процессов при  $r=1, \dots, N$ :

$$u_r(t) = U_{r0}(t) - J_r \chi_{0r}(t-t_r) - \sum J_k \chi^{(0)}(x_{0r}, x_0; t-t_k), \quad (10)$$

где суммирование производится при  $k \neq r$ .

Представление (10) описывает важнейший в приложениях случай одного удара, приходящегося на один период внешнего воздействия [1, 2]. Сохраняя единообразное наименование с другими аналогичными представлениями, получаемых при посредстве методов частотно-временного анализа, будем называть его  $2N$  - параметрическим (ср. [5, 6]). Искомые  $N$  относительных перемещений  $u_r(t)$  ( $r=1, \dots, N$ ) определяются при посредстве  $2N$  параметров движения -  $N$  импульсов  $J_r$  и  $N$  фазами ударов  $t_r$  в каждой из  $N$  ударных пар.

Для нахождения этих неизвестных параметров движения воспользуемся вторым и третьим условиями удара (8). Серия «вторых» условий (8) даст  $N$  линейных алгебраических уравнений, связывающих неизвестные величины  $J_r$  и  $t_r$ :

$$\Delta_r = U_{r0}(t_r) - J_r \chi_{0r}(0) - \sum J_k \chi^{(0)}(x_{0r}, x_0; t_r-t_k) \quad (r=1, \dots, N). \quad (11)$$

Серия «третьих» условий (8) даст  $N$  нелинейных алгебраических уравнений, связывающих те же величины :

$$J_r[(1+R_r)m_r]^{-1}=U_{r0t}(t)-J_r\chi_{0rt}(t-t_r-0)-\sum J_k\chi_{kt}^{(0)}(x_{0r},x_{0k}; t-t_k-0). \quad (12)$$

При этом в формулах (11) и (12) суммирование при  $k \neq r$  не ведется. Решения системы (10), (11) - пары  $(J_r^0, t_r^0)$  числом кратным  $N$ , могут определить  $N$  представлений (9), определяющих изменение каждой из  $N$  относительных координат  $u_r(t)$  при условии, что за один период возбуждающего воздействия в каждой из ударных пар происходит ровно одно соударение. Пользуясь общими схемами методов частотно-временного анализа [1, 2], аналогичные соотношения можно получить и в случае симметричных ударных пар или более сложных комбинированных случаев присутствия в системе ударных пар обоих типов.

При рассмотрении комбинационных периодических режимов, которые могут иметь место при выполнении соотношений  $qT_1=pT$  (см. выше), соотношения (6) и (9) - (12) формально сохраняют свой вид, однако ПФГ, определяемые рядами типа (6), теперь строятся на периодах

$T=qr^{-1}T_1$ . Точно также аналогичные соотношения можно получить и для случаев, когда в ударных парах за один период внешнего воздействия происходит несколько соударений (дребезг) [1, 2].

Выведенные представления являются точными, то есть в рамках ньютоновской концепции прямого и центрального удара они есть точные решения соответствующих уравнений движения. При использовании их в качестве инструмента аналитического исследования проявляются три принципиальные проблемы.

Во-первых, аналитические решения трансцендентных систем, определяющих импульсы и фазы ударов в большинстве случаев, видимо, невозможны. Так что речь может вестись, вообще говоря, о численно-аналитических решениях.

Во-вторых, оказываются достаточно затруднительными исследования найденных решений на устойчивость. Здесь снова может потребоваться привлечение различных методов моделирования. И кроме того, возможно использование упрощенных схем исследования, использующих, например, разного рода условия, позволяющие выделить заведомо неустойчивые решения [1].

В-третьих, найденные режимы должны удовлетворять так называемым условиям отсутствия дополнительных пересечений [1, 2]. То есть функции  $u_r$ , фигурирующие в представлениях типа (9) во все моменты времени должны удовлетворять неравенствам типа  $u_r \leq \Delta$ . Эта проблема решается также посредством численного или качественного анализа.

3. Взаимодействие системы изолированных точечных тел с «ударными осцилляторами». Рассмотрим систему (рис.2), являющую собой невесомую струну с насаженными на нее через одинаковые расстояния массивными точечными

телами - «бусинами». Пусть каждая бусина ограничивает ход так называемых «ударных осцилляторов» [1, 2], которые предполагаются идентичными.

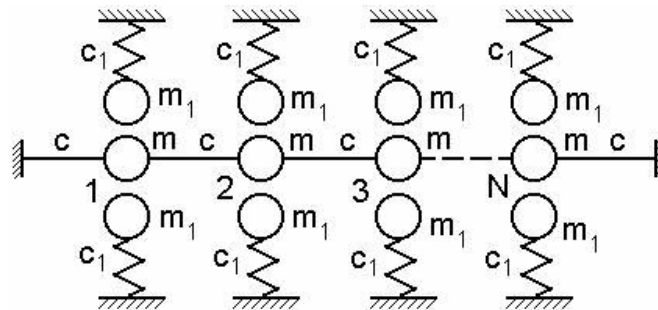


Рис.2

Уравнения движения бусин вместе с условиями защемления струны на краях имеют вид:

$$m u_{ktt} + c(2u_k - u_{k+1} - u_{k-1}) + \Phi_k(u_r, u_{rt}) = g_k(u_k, u_{kt}, \dots, t); \quad k=1, \dots, N; \quad u_0 = u_{N+1} = 0. \quad (13)$$

Здесь  $g_k(u_k, u_{kt}, \dots, t)$  - неконсервативные силы, описываемые при помощи гладких функций;  $\Phi_k$  - сила удара в каждой из  $N$  ударных пар;  $u_r$  - относительные координаты (см. ниже). К уравнениям (13) добавим  $2N$  уравнений ударных осцилляторов. Для группы (1) из  $N$  «верхних» осцилляторов и для группы (2) из  $N$  «нижних» осцилляторов имеем:

$$m_1 u_{1jtt} + c_1 u_{1jt} + \Phi_j(u_r, u_{rt}) = f_{1j}(u_{1j}, u_{1jt}, t); \quad j=1, \dots, N; \quad (14)$$

$$m_1 u_{2qtt} + c_1 u_{2qt} + \Phi_j(u_r, u_{rt}) = f_{2j}(u_{2q}, u_{2qt}, t); \quad q=1, \dots, N. \quad (15)$$

Для отыскания периодических режимов движения в системе (14),(15) необходимо перейти от дифференциальных к операторным уравнениям движения [см. (3)-(5)] и далее, после разрешения системы (11), (12) найти решения в форме (10).

Протрем это на примере цепочки с двумя звеньями, т.е. рассмотрим модель системы с шестью степенями свободы (рис.2). Имея в виду получить механизм для изучения резонансных режимов движения, т.е. периодических режимы, в системах, близких к вырожденным (консервативным) системам, когда удары абсолютно упругие и равны нулю правые части уравнений движения (13)-(15):  $g_k = f_{1j} = f_{2j} = 0$ , а близкие к ним режимы реализуются только лишь при малых значениях этих правых частей, и также мала величина  $1-R$ , запишем три группы вырожденных (консервативных) уравнений движения, внося уместные в данном случае очевидные упрощения в обозначениях и индексации. Во-первых для несущей цепочки:

$$u_{1tt} + 2u_1 - u_2 - \Phi_1(u_{11}) + \Phi_1(u_{21}) = 0; \quad u_{2tt} + 2u_2 - u_1 - \Phi_2(u_{12}) + \Phi_2(u_{22}) = 0, \quad (16)$$

где  $u_{1,2}$  - искомые перемещения массивных включений в цепочке, отсчитываемые от ее равновесного положения;  $u_{11}$ ,  $u_{12}$  и т. д. - определяемые ниже относительные координаты. Граничные условия:  $u_0=u_3=0$ . Без ограничения общности массы взаимодействующих тел и упругости соответствующих пролетов струны считаются единичными. В таком случае спектр собственных частот линейной цепочки оказывается следующим:  $\{\Omega^*_1; \Omega^*_2\} = \{1; \sqrt{3}\}$ .

Далее имеем еще две группы уравнений. Сообразуясь с рис.2 получим для «верхних» и «нижних» ударников соответственно:

$$u_{11t} + \Omega^2_1 u_{11} + \Phi_1(u_{11}) = 0; \quad u_{21t} + \Omega^2_2 u_{21} + \Phi_2(u_{12}) = 0; \quad (17)$$

$$u_{11t} + \Omega^2_1 u_{11} - \Phi_1(u_{21}) = 0; \quad u_{21t} + \Omega^2_2 u_{21} - \Phi_2(u_{22}) = 0, \quad (18)$$

причем здесь значки « $\hat{\phantom{x}}$ » и « $\wedge$ » и отвечают соответственно группам верхних и нижних ударников. Для фигурирующих в системе (16)-(18) относительных координат имеем:

$$u_{11} = u_1 - \hat{u}_1; \quad u_{12} = u_2 - \hat{u}_2; \quad u_{21} = u_1 - u_{\wedge 1}; \quad u_{22} = u_2 - u_{\wedge 2} \quad (19)$$

Перейдем теперь от дифференциальных к операторным уравнениям движения. Для элементов несущей цепочки находим:

$$u_1 = L^*_{11}(p)[\Phi_1(u_{11}) - \Phi_1(u_{21})] + L^*_{21}(p)[\Phi_2(u_{12}) - \Phi_2(u_{22})]; \quad (20)$$

$$u_2 = L^*_{22}(p)[\Phi_2(u_{12}) - \Phi_2(u_{22})] + L^*_{12}(p)[\Phi_1(u_{11}) - \Phi_1(u_{21})] \quad (21)$$

Сюда осталось добавить уравнения для четырех ударников. Для «верхнего левого» (рис.2) находим, принимая во внимание, что искомое перемещение формируется, во-первых, непосредственно в результате воздействия ударов на тело ударника и, кроме того, как результат перемещения другой составляющей той же ударной пары, находим:

$$\hat{u}_1 = -L^*_1(p)\Phi_1(u_{11}) - L^*_{11}(p)[\Phi_1(u_{11}) - \Phi_1(u_{21})] - L^*_{12}(p)[\Phi_2(u_{22}) - \Phi_2(u_{12})]. \quad (22)$$

И аналогично для «нижнего левого», «верхнего правого» и «нижнего правого» находим:

$$u_{\wedge 1} = L^*_{11}(p)\Phi_1(u_{21}) + L^*_{11}(p)[\Phi_1(u_{21}) - \Phi_1(u_{11})] - L^*_{12}(p)[\Phi_2(u_{12}) - \Phi_2(u_{22})]; \quad (23)$$

$$\hat{u}_2 = -L^*_2(p)\Phi_2(u_{12}) - L^*_{22}(p)[\Phi_2(u_{12}) - \Phi_2(u_{22})] - L^*_{21}(p)[\Phi_1(u_{21}) - \Phi_1(u_{11})]; \quad (24)$$

$$u_{\wedge 2} = L^*_{22}(p)\Phi_2(u_{22}) + L^*_{22}(p)[\Phi_2(u_{22}) - \Phi_2(u_{12})] - L^*_{21}(p)[\Phi_1(u_{11}) - \Phi_1(u_{21})]. \quad (25)$$

Теперь в соответствии с изложенной теорией, для отыскания периодических режимов движения, необходимо перейти от операторных уравнений движения к представлениям через ПФГ типа (10). Предполагается, что в каждой ударной паре за период движения происходит по одному соударению; дребезги отсутствуют.



(Заметим, что в консервативных системах с одной степенью свободы дребезги, вообще, невозможны [1]).

В соответствии с общими методами [1], можно построить ПФГ, отвечающие операторам динамической податливости, фигурирующим в уравнениях (20) - (25). Соответственно операторам  $L^*_{11}(p)=L^*_{22}(p)$  и  $L^*_{12}(p)=L^*_{21}(p)$  (равенства здесь следует из симметрии цепочки и принципа взаимности) будут отвечать ПФГ вида:

$$\chi^*_{11}(t)=\chi^*_{22}(t)=(4\sin 0,5T)^{-1}[\cos(t-0,5T)]+(4\sqrt{3}\sin 0,5\sqrt{3}T)^{-1}[\cos 0,5\sqrt{3}(t-0,5T)] \quad (26)$$

$$\chi^*_{12}(t)=\chi^*_{21}(t)=(4\sin 0,5T)^{-1}[\cos(t-0,5T)]-(4\sqrt{3}\sin 0,5\sqrt{3}T)^{-1}[\cos 0,5\sqrt{3}(t-0,5T)] \quad (27)$$

Эти формулы представляют собой результат суммирования рядов Фурье типа (6), определяющих ПФГ на интервале периодичности [1, 2]. Например, для операторов  $L^*_{ki}(p)$  ( $k,i=1,2$ ) имеем ряд:

$$\chi^*_{ki}(t)=T^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} L^*_{ki}(in\omega)\exp(in\omega t),$$

которому и отвечает формулы (26), (27).

Конечные представления (26), (27) и другие им подобные имеют место только при  $t \in [0, T]$ . Вне интервала периодичности данные формулы известным образом корректируются [1, 2], либо используются ряды Фурье.

Заметим, что вид формул (26), (27), в частности, определяется указанным выше спектром собственных частот несущей цепочки (в линейном случае):  $\{\Omega^*_1; \Omega^*_2\} = \{1; \sqrt{3}\}$ .

Наконец, как следует из соотношений (22)-(25), вид искомого представлений определяют также ПФГ, соответствующие операторам  $\hat{L}_1(p)$ ,  $L_{\wedge 1}(p)$ ,  $\hat{L}_2(p)$ ,  $L_{\wedge 2}(p)$ , которые строятся, исходя из линейных частей уравнений движения одномассных ударников (17), (18).

При выборе единичных значений масс тел ударников указанные операторы имеют вид  $L^*_i(p)=(p^2+\Omega_i^2)^{-1}$ , где  $\Omega_i$ - некоторая частота;  $i=1,2$ ; символ  $^* \in \{\hat{\wedge}, \wedge\}$ . Соответствующие ПФГ вычислены в [1, 2]:

$$\chi^*_i(t)=(2\Omega_i\sin 0,5WT)^{-1}\cos \Omega_i(t-0,5T) \quad (t \in [0, T]). \quad (28)$$

Теперь можно сформировать представления (8) для определения искомого перемещений. Используя операторные представления (22)-(25), запишем при помощи ПФГ для относительных координат:

$$u^{\wedge}_1 = -\hat{J}_{\wedge 1}\chi_1(t-\varphi^{\wedge}_1) - \hat{J}_{\wedge 1}\chi^*_{11}(t-\varphi^{\wedge}_1) + J_{\wedge 1}\chi^*_{11}(t-\varphi^{\wedge}_1) - \hat{J}_{\wedge 2}\chi^*_{12}(t-\varphi^{\wedge}_2) + J_{\wedge 2}\chi^*_{22}(t-\varphi^{\wedge}_2); \quad (29)$$

$$u_{\wedge 1} = J_{\wedge 1}\chi_1(t-\varphi^{\wedge}_1) + J_{\wedge 1}\chi^*_{11}(t-\varphi^{\wedge}_1) - \hat{J}_{\wedge 1}\chi^*_{11}(t-\varphi^{\wedge}_1) - \hat{J}_{\wedge 2}\chi^*_{12}(t-\varphi^{\wedge}_2) + J_{\wedge 2}\chi^*_{12}(t-\varphi^{\wedge}_2); \quad (30)$$



$$u_2^{\wedge} = -J_2^{\wedge} \chi_2(t - \varphi_2^{\wedge}) - J_2^{\wedge} \chi_{22}^*(t - \varphi_2^{\wedge}) + J_2^{\wedge} \chi_{22}^*(t - \varphi_1^{\wedge}) - J_1^{\wedge} \chi_{21}^*(t - \varphi_1^{\wedge}) + J_1^{\wedge} \chi_{21}^*(t - \varphi_1^{\wedge}); \quad (31)$$

$$u_2^{\wedge} = J_2^{\wedge} \chi_2(t - \varphi_2^{\wedge}) - J_2^{\wedge} \chi_{22}^*(t - \varphi_2^{\wedge}) - J_2^{\wedge} \chi_{22}^*(t - \varphi_2^{\wedge}) - J_1^{\wedge} \chi_{21}^*(t - \varphi_1^{\wedge}) + J_1^{\wedge} \chi_{21}^*(t - \varphi_1^{\wedge}). \quad (32)$$

Легко видеть, что если, например, перейти к тензорным обозначениям и ввести достаточно сложную индексацию, то совершенно аналогичные представления можно получить и для общего случая произвольного количества ударных пар (рис.2).

В соотношения (29)-(32) входят определяющие параметры движения- импульсы и фазы ударов. Для их нахождения надо выписать и решить систему трансцендентных уравнений (11), (12), которая строится для данного конкретного случая. При этом в силу консервативности системы одна из фаз оказывается интегралом движения и, может быть положена равной нулю, так как удар в какой-нибудь из ударной пар всегда можно совместить с началом отсчета времени.

После нахождения значений импульсов и фаз, легко определить решения уравнений (17), (18):

$$u_1^{\wedge} = -J_1^{\wedge} \chi_1(t - \varphi_1^{\wedge}); u_2^{\wedge} = -J_2^{\wedge} \chi_2(t - \varphi_2^{\wedge}); u_1^{\wedge} = J_1^{\wedge} \chi_1(t - \varphi_1^{\wedge}); u_2^{\wedge} = J_2^{\wedge} \chi_2(t - \varphi_2^{\wedge}). \quad (33)$$

Теперь с помощью (19) и (29)-(33) можно определить две оставшиеся абсолютные координаты  $u_1$  и  $u_2$  и с учетом вычисленных представлений для ПФГ, задача будет полностью решена. При этом необходимо подчеркнуть, что мы получаем именно аналитические точные решения сильно нелинейной задачи со многими степенями свободы.

Нельзя не отметить, что, несмотря на кажущую простоту, аналитически определить все решения системы уравнений (11), (12), а также провести проверку ряда дополнительных условий [1, 2, 6] (неотрицательность импульсов ударов, выполнения условий отсутствия дополнительных пересечений и др.) весьма сложно. Указанные проблемы образуют совершенно самостоятельный круг и здесь рассматриваться не могут. Заметим, впрочем, что в конкретных случаях исследования достаточно легко проводятся численно. Имея в виду, рассмотреть именно аналитические решения, обратимся к исследованию так называемых нелинейных форм колебаний см., например, [6-8] - специальных типов периодических режимов, обладающих определенными свойствами симметрии.

Предположим для определенности, что все ударники одинаковы:  $\Omega_1 = \Omega_2$ . В этом случае ввиду симметрии системы ударные импульсы во всех четырех ударных парах равны:  $J_1^{\wedge} = J_2^{\wedge} = J_1^{\wedge} = J_2^{\wedge} \equiv J$ . В силу консервативности системы и свойств ПФГ [1,2] все уравнения (12) в данном случае удовлетворяются тождественно. Уравнения (11) принимают вид:

$$u_1^{\wedge}(\varphi_1^{\wedge}) = \Delta; u_1^{\wedge}(\varphi_1^{\wedge}) = -\Delta; u_2^{\wedge}(\varphi_2^{\wedge}) = \Delta; u_2^{\wedge}(\varphi_2^{\wedge}) = -\Delta \quad (34)$$

Исходя из соображений симметрии, в данной системе возможны два типа нелинейных форм: синфазная (рис.3,а) и антисинфазная (рис.3,б).

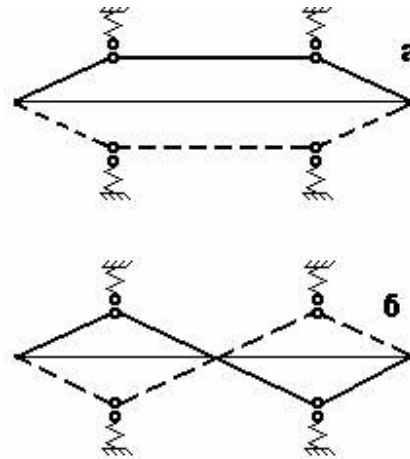


Рис.3

При реализации важнейшей в приложениях синфазной формы, удары во всех ударных парах происходят одновременно и, кроме того,  $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = 0$ ;  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0,5T$ , причем  $T$  - период колебаний.

В то же время при реализации антисинфазной формы:  $\hat{\varphi}_1 = \varphi_2 = 0$ ;  $\varphi_1 = \hat{\varphi}_2 = 0,5T$ .

Рассмотрим синфазную форму движений. Учитывая сделанные предположения о значениях фаз ударов, для нахождения искомого закона движения необходимо воспользоваться представлениями (19), (29) - (33), а также формулами (26)-(28). Тогда для полного описания синфазной формы осталось вычислить общее значение всех импульсов  $J$ . Учитывая сделанные предположения достаточно воспользоваться любым из уравнений (34). После простых преобразований с учетом вычисленного, приходим к простой формуле:

$$J = -\Delta[(1/2\Omega)^{-1} \text{ctg} 0,5\Omega T + 0,5 \text{ctg} 0,5T - 0,5 \text{cosec} 0,5T]^{-1} \quad (35)$$

Тем самым описание синфазной формы завершено. Для иллюстрации найденного положим для примера  $\Omega = 1$ . Тогда представление (35) трансформируется в хорошо известное представление для импульса удара симметричного ударного осциллятора [1,2]:  $J = 2\Delta \text{ctg}(\pi/2\omega)$ , где частота колебаний  $\omega = 2\pi T^{-1}$ . Таким образом (рис.4) поведение синфазной формы подобно поведению жестко анизохронной консервативной системы. То есть при реализации колебаний по этой форме сохраняются свойства, аналогичные свойствам ударного осциллятора: затягивания по частоте и амплитуде, возможность осуществления жесткого запуска виброударного режима и т.п. [1-4].

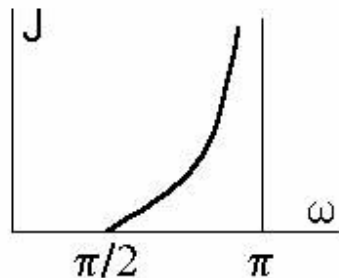


Рис.4

Совершенно аналогично рассматривается и антифазная форма колебаний. Здесь так же имеет место жесткий анизоханизм и известная аналогия с ударным осциллятором. Если, например, положить  $\Omega = \sqrt{3}$ , то для общего значения импульса будем иметь:  $J = 2\sqrt{3} \Delta \text{ctg}(\pi\sqrt{3}/2\omega)$ .

В заключение отметим, что при рассмотрении, например, вынужденных колебаний, близких к выделенным нелинейным формам колебаний и осуществляемых при малых неконсервативных силах (силы  $g_k \equiv f_{1j} \equiv f_{2j}$  и величина  $1-R$  не равны нулю, но малы), можно, как это уже неоднократно проделывалось в подобных случаях, воспользоваться принципом энергетического баланса и определить условия существования колебаний, близких к найденным выше [1,2]. Подобные рассмотрения, как и вопросы, связанные с устойчивостью соответствующих движений выходят за круг вопросов, вынесенных к обсуждению в данной работе.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Проект 05-08-50183).*

### Литература

1. Бабицкий В.И., Крупенин В.Л. Колебания в сильно нелинейных системах.- М.: Наука, 1985.-320 с.
2. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems.- Berlin. Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2001. – 404 p.p.
3. В.Л. Крупенин К описанию движения систем общего вида, взаимодействующих через удары с выделенным объектом.// Письма в «ВНТР», 2008, №2 –С. 33 -38.
4. Широкополосные виброударные генераторы механических колебаний.// Веприк А.М., Вознюк А.Д., Крупенин В.Л., Чирков И. М.- Л: Машиностроение, 1987.-72 с.

5. Крупенин В.Л. Несимметричные колебания в системах, содержащих двойные ограничители // ДАН, т.341, N1, 1995, с.49-51.
6. Крупенин В.Л. Периодические движения в семействе упругих систем со взаимодействующими через удары граничными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2001, №3, с.20-28.
7. Крупенин В.Л. К исследованию высших нелинейных форм колебаний виброударных систем с распределенными ударными элементами // Проблемы машиностроения и надежности машин 2005. № 6. С. 31-38.
8. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Экспериментальное исследование колебаний струн, взаимодействующих с точечными ограничителями // Доклады Российской Академии Наук, 2001, Т.379, №3, с.329-333.

*Институт машиноведения РАН, Москва, Россия.*

*Поступила: 03.06.08.*