

УДК 620.179.16

## О СТРУКТУРЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СЛОЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

**Н.В. Ключева**

В работе проводится исследование структуры волнового поля, возникающего при действии периодической нагрузки на поверхность упругого слоя на жестком основании. Рассмотрены вопросы выделения модовых составляющих в интерференционном волновом поле.

### 1. Введение.

В прикладных исследованиях часто важен не столько расчет смещений от воздействия периодической нагрузки, сколько выяснение структуры волнового поля (из каких мод формируется волновое поле, какие моды являются доминирующими, дисперсионные характеристики, возбуждаемые распространяющиеся и затухающие моды, амплитудно-частотные характеристики, распределение энергии по формам колебаний и т. д.). Так, в задачах, связанных с виброгашением, желательно знать какая мода несет наибольшую энергию при определенных предположениях относительно источника вибраций. Виброакустический контроль нередко приходится осуществлять, когда возможно возбуждение сразу нескольких форм распространяющихся колебаний. В подобных случаях нужна хотя бы уверенность, что возбуждается та форма, на которой ведется диагностика, и её амплитуда не мала в сравнении с остальными.

Среди огромного количества литературы о вынужденных колебаниях следует отметить классическую работу Лэмба [1], наиболее важные работы, связанные с получением фундаментального решения (метод Каньяра–де Хупа, преобразование Радона и др. [2-4]), и некоторые монографии (Бабешко В.А. и соавт., Ewing W.M. и соавт., Ahenbach J.D., Aki K., Richards P.G., Бреховских Л.М., Петрашень Г.И. и соавт. [5-14]). Определенный интерес представляют работы по контактными задачам [15]. Нельзя обойти вниманием важные работы по упругим волнам от источника, которые традиционно относят к сейсмологии [20, 21]. Вместе с тем остается недостаточно исследованной модовая структура волновых полей и распределение энергии по формам колебаний. Здесь можно отметить работы по распределению энергии для волн от источника на поверхности упругого полупространства (Miller G.F., Pursey H, С.Я.Когана, Конюховой И.Д., Ю.М.Заславского, А.В.Разина, Е. В. Глушкова, Г.А. Максимова и др. [28-29]). В работах А.В. Белокопя и А.В. Наседкина [30] рассматривались вопросы, связанные с распространением потока энергии в однородном акустическом и упругом слоях, жестко защемленных по границе. Мало исследованными остаются амплитудно-частотные характеристики. Практически без внимания остались случаи, когда свойства поверхностного слоя грунта значительно отличаются от вязко-упругих, принимаемых в традиционных моделях типа Фойхта-Зинера, например, в случае пористого водонасыщенного грунта. До самого последнего времени исследование волновых процессов в средах из материалов с отмеченными выше свойствами ограничивалось самыми простыми случаями: плоская гармоническая волна в безграничной среде, поверхностная гармоническая волна на границе полупространства или низшая мода в простом объекте (стержене, пластине).

## 2. Постановка задачи.

Рассмотрим упругий слой, покоящийся на жестком основании при воздействии на свободную поверхность периодической нагрузки (рис. 1). Разложим силу, действующую на поверхность слоя на касательную и нормальную составляющие. Будем рассматривать волновое поле, созданное распространяющимися волнами, в зоне, где пренебрежимо мало влияние неоднородных затухающих волн. Уравнения движения изотропной упругой среды имеют вид:

$$-\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + (c_p^2 - c_s^2) \text{grad div } \mathbf{u} + c_s^2 \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений,  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорости продольных и сдвиговых волн, соответственно,  $\lambda, \mu$  – модули упругости Ламе,  $\rho$  – плотность.

На поверхностях слоя ( $z = 0$  и  $z = h$ ) вне области действия периодической нагрузки должны выполняться условия отсутствия напряжений на свободной поверхности и непрерывности нормальных перемещений на границе с основанием.

Для тангенциальной составляющей:

$$\sigma_{zz}|_{z=h} = 0, \quad \sigma_{zx}|_{z=h} = -\Pi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zy}|_{z=h} = 0, \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad (2a)$$

для нормальной составляющей:

$$\sigma_{zz}|_{z=h} = -\Pi(x)e^{-i\omega t}, \quad \sigma_{zx}|_{z=h} = 0, \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad (2b)$$

где  $\Pi(\mathbf{x})$  – функция, описывающая распределение касательных напряжений.

В случае точечной нагрузки  $\Pi(\mathbf{x}) = P\delta(\mathbf{x})$ , где  $\delta(\mathbf{x})$  – дельта-функция; в случае равномерно распределенной по кругу радиуса  $a$  касательной нагрузки  $\Pi(\mathbf{x}) = PH(a - r)/(\pi a^2)$ ,  $H(r)$  – функция Хевисайда,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

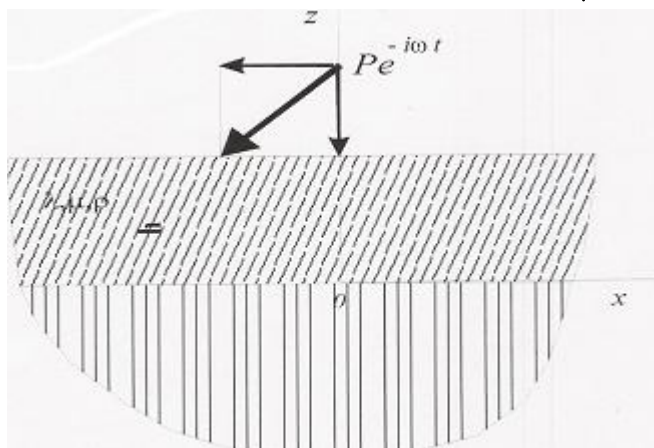


Рис. 1

## 3. Тангенциальная нагрузка.

Исследуем структуру волнового поля, возбуждаемого тангенциальной периодической силой, приложенной к поверхности слоя, лежащего на жестком основании в дальней зоне (рис. 1). О вычислении волнового поля достаточно подробно рассказано в опубликованной работе [31]. (В случае слоя на жестком основании использовались методы кон-

турного интегрирования с суммированием вычетов в полюсах, лежащих на действительной оси (если рассматривалось поле в дальней зоне) и в ряде случаев (когда нельзя было пренебречь влиянием неоднородных волн) учитывались полюса, отстоящие от действительной оси).

Представим вектор перемещений  $\mathbf{u}$  через скалярные потенциалы

$$\mathbf{u} = \nabla\theta + \text{rot}(\boldsymbol{\psi}), \quad (3)$$

которые в силу (1) должны удовлетворять волновым уравнениям

$$-\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + c_p^2\Delta\theta = 0, \quad -\frac{\partial^2\psi_n}{\partial t^2} + c_s^2\Delta\psi_n = 0, \quad (n=1\dots3) \quad \text{div}\boldsymbol{\psi} = 0 \quad (4)$$

( $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа, остальные обозначения стандартные) и, в

случае точечной нагрузки, следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \lambda\nabla^2\theta + 2\mu\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y\partial z}\right)\Bigg|_{z=h} &= 0, \\ 2\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}\Bigg|_{z=0} &= -P/\mu, \\ 2\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi_3}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\Bigg|_{z=h} &= 0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\Bigg|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Сделаем преобразование Фурье по пространственным переменным  $x$  и  $y$

$$\tilde{\theta}(\alpha_1, \alpha_2, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta e^{-i\alpha_1 x - i\alpha_2 y} dx dy, \quad \tilde{\psi}_n(\alpha_1, \alpha_2, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n e^{-i\alpha_1 x - i\alpha_2 y} dx dy$$

Далее будем искать решение уравнений в пространстве Фурье-образов в форме

$$\tilde{\theta} = (Gsh\eta z + Bch\eta z)e^{-i\omega t}, \quad \tilde{\psi}_n = (C_n sh\zeta z + D_n ch\zeta z)e^{-i\omega t}, \quad n=1,2,3 \quad (6)$$

где  $\eta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2 c_p^{-2}}$ ,  $\zeta = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2 c_s^{-2}}$ .

Нетрудно показать, что

$$G = 0, \quad D_n = 0, \quad (n=1,2), \quad C_3 = 0,$$

Удобно перейти к безразмерным переменным

$$z' = z/h, \quad r' = r/h, \quad t' = tc_s/h, \quad \theta' = \theta/h^2, \quad \boldsymbol{\psi}' = \boldsymbol{\psi}/h^2, \quad P' = P/\mu$$

(далее штрихи опускаем), тогда система для искомым неизвестных может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 k_1 C_1 + k_2 C_2 - i\zeta D_3 &= 0 \\
 (2k^2 - \Omega^2) ch\eta B - 2i\zeta k_2 ch\zeta C_1 + 2i\zeta k_1 ch\zeta C_2 &= 0, \\
 2ik_1 \eta sh\eta B + k_1 k_2 sh\zeta C_1 - (k_1^2 + \zeta^2) sh\zeta C_2 + ik_2 \zeta sh\zeta D_3 &= -P/\mu \\
 2ik_2 \eta sh\eta B + (k_2^2 + \zeta^2) sh\zeta C_1 - k_1 k_2 sh\zeta C_2 - ik_1 \zeta sh\zeta D_3 &= 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\Omega = \omega h / c_s$ ,  $k_1 = \alpha_1 h$ ,  $k_2 = \alpha_2 h$ ,  $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ ,  $\eta = \sqrt{k^2 - \Omega^2} c_s^2 c_p^{-2}$ ,  $\zeta = \sqrt{k^2 - \Omega^2}$ .

Решение системы (7) позволяет получить выражения для перемещений

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{P}{4\pi^2} e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2k_1^2 \zeta ch\zeta}{S} ch\eta z - \frac{k_2^2}{\Omega^2 \zeta sh\zeta} ch\zeta z - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\zeta [(2k^2 - \Omega^2)(\Omega^2 - 2k_2^2) sh\zeta ch\eta + 4k_2^2 \eta \zeta sh\eta ch\zeta]}{S \Omega^2 sh\zeta} ch\zeta z \right\} e^{ik_1 x + ik_2 y} dk_1 dk_2, \\
 u_y &= \frac{P}{4\pi^2} e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2k_1 k_2 \zeta ch\zeta}{S} ch\eta z + \frac{k_1 k_2}{\zeta sh\zeta \Omega^2} ch\zeta z \right\} \\
 &\quad + \frac{2k_1 k_2 \zeta [(\Omega^2 - 2k^2) sh\zeta ch\eta + 2\eta \zeta sh\eta ch\zeta]}{S \Omega^2 sh\zeta} ch\zeta z \left\} e^{ik_1 x + ik_2 y} dk_1 dk_2, \\
 u_z &= -\frac{iP}{4\pi^2} e^{-i\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2k_1 \eta \zeta ch\zeta}{S} sh\eta z + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_1 (\Omega^2 - 2k^2) ch\eta}{S} sh\zeta z \right\} e^{ik_1 x + ik_2 y} dk_1 dk_2,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $S = (2k^2 - \Omega^2)^2 sh\zeta ch\eta - 4k^2 \zeta \eta ch\zeta sh\eta$ .

Для описания волнового поля в дальней зоне  $r \gg 1$  удобнее использовать цилиндрическую систему координат  $Ozr\vartheta$ . Радиальные  $u_r$  и азимутальные  $u_\vartheta$  перемещения выражаются через  $u_x$ ,  $u_y$  по формулам

$$u_r = u_x \cos \vartheta + u_y \sin \vartheta, \quad u_\vartheta = -u_x \sin \vartheta + u_y \cos \vartheta$$

Чтобы избавиться от двойных интегралов, сделаем замену переменных интегрирования  $k_1 = k \cos \varphi$ ,  $k_2 = k \sin \varphi$  и пространственных переменных  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ . Осуществим интегрирование по  $\varphi$ , используя соотношения

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} z_j(\varphi) z_l(\varphi) e^{ikr \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi &= 2\pi \left\{ z_j(\vartheta) z_l(\vartheta) \left( J_0(kr) - \frac{2J_1(kr)}{kr} \right) + \delta_{jl} \frac{J_1(kr)}{kr} \right\} \\
 \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi &= 2\pi J_0(kr), \quad \int_0^{2\pi} \cos \varphi e^{ikr \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi = 2i\pi \cos \vartheta J_1(kr)
 \end{aligned}$$

где  $j, l = 1, 2$ ;  $z_1(\vartheta) = \cos \vartheta$ ,  $z_2(\vartheta) = \sin \vartheta$ ,  $\delta_{jl}$  – символ Кронекера. Причем в дальней

зоне можно пользоваться приближенной формулой

$$\int_0^{2\pi} z_j(\varphi) z_l(\varphi) e^{ikr \cos(\varphi - \vartheta)} d\varphi = 2\pi z_j(\vartheta) z_l(\vartheta) J_0(kr)$$

После преобразований выражения для нормальных, радиальных и азимутальных перемещений приводятся к виду

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{P \cos \vartheta}{2\pi} e^{-i\Omega t} \int_0^\infty \left\{ \frac{2\eta \zeta \operatorname{ch} \zeta}{S} \operatorname{sh} \eta z + \frac{(\Omega^2 - 2k^2) \operatorname{ch} \eta}{S} \operatorname{sh} \zeta z \right\} J_1(kr) k^2 dk, \\ u_r &= \frac{P \cos \vartheta}{2\pi} e^{-i\Omega t} \int_0^\infty \left\{ \frac{2k^2 \zeta \operatorname{ch} \zeta}{S} \operatorname{ch} \eta z - \frac{\zeta(2k^2 - \Omega^2) \operatorname{ch} \eta}{S} \operatorname{ch} \zeta z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4k^2 \zeta [(\Omega^2 - 2k^2) \operatorname{sh} \zeta \operatorname{ch} \eta + 2\eta \zeta \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \zeta]}{S \Omega^2 \operatorname{sh} \zeta} \sin^2 \vartheta \operatorname{ch} \zeta z \right\} J_0(kr) k dk \\ u_\vartheta &= \frac{P \sin \vartheta}{2\pi} e^{-i\Omega t} \int_0^\infty \left\{ \frac{\zeta(2k^2 - \Omega^2) \operatorname{ch} \eta}{S} + \frac{k^2}{\Omega^2 \zeta \operatorname{sh} \zeta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2k^2 \zeta [(\Omega^2 - 2k^2) \operatorname{sh} \zeta \operatorname{ch} \eta + 2\eta \zeta \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \zeta]}{S \Omega^2 \operatorname{sh} \zeta} \cos 2\vartheta \right\} \operatorname{ch} \zeta z J_0(kr) k dk \end{aligned} \quad (9)$$

Выразим функции Бесселя  $J_j(kr)$  через функции Ганкеля  $J_j(kz) = \frac{1}{2} [H_j^{(1)}(kz) - (-1)^j H_j^{(1)}(-kz)]$  ( $j = 0, 1$ ) и сделаем  $-\infty$  нижним пределом интегрирования. Для вычисления интегралов (13) используем метод контурного интегрирования. Далее будем рассматривать  $k$  как комплексную переменную  $k = k_r + ik_i$ . Стандартным образом проведем разрезы из точек ветвления и возьмем тот лист римановой поверхности, где  $\operatorname{Re} \eta > 0$ ,  $\operatorname{Re} \zeta > 0$ . Образую замкнутый контур присоединением к вещественной оси полуокружности большого радиуса, которую, исходя из условий излучения, проведем в верхней полуплоскости. Функции под знаком интегралов имеют особенности в точках на комплексной плоскости и в том числе в точках на вещественной оси. Способ обхода полюсов на вещественной оси определяется условиями излучения, с учетом того, что иногда групповые скорости некоторых мод в определенных частотных пределах принимают отрицательные значения – возникает “обратная волна” [3-6]. Достаточно далеко от источника основной вклад в волновое поле будут вносить распространяющиеся моды (т.е. моды у которых волновое число является вещественным), что позволяет, основываясь на формуле для вычисления вычетов в полюсах первого порядка (полюса второго порядка могут появиться только при определенных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$ ), записать

$$\begin{aligned}
 u_z(r, \vartheta) &= iPe^{-i\Omega t} \cos \vartheta \sum_{n=0}^{N(\Omega)} k_n^2 \Lambda_n(\Omega) g_{zn}(\Omega, z) H_1^{(1)}(k_n r), \\
 u_r &= iPe^{-i\Omega t} \cos \vartheta \sum_{n=0}^{N(\Omega)} k_n \Lambda_n(\Omega) g_{rn}(\Omega, \vartheta, z) H_0^{(1)}(k_n r), \\
 u_\vartheta &= iPe^{-i\Omega t} \sin \vartheta \sum_{n=0}^{N(\Omega)} k_n \Lambda_n(\Omega) g_{\vartheta n}(\Omega, \vartheta, z) H_0^{(1)}(k_n r)
 \end{aligned} \tag{10}$$

где  $N(\Omega)$  – число распространяющихся мод, возбуждаемых на данной частоте;

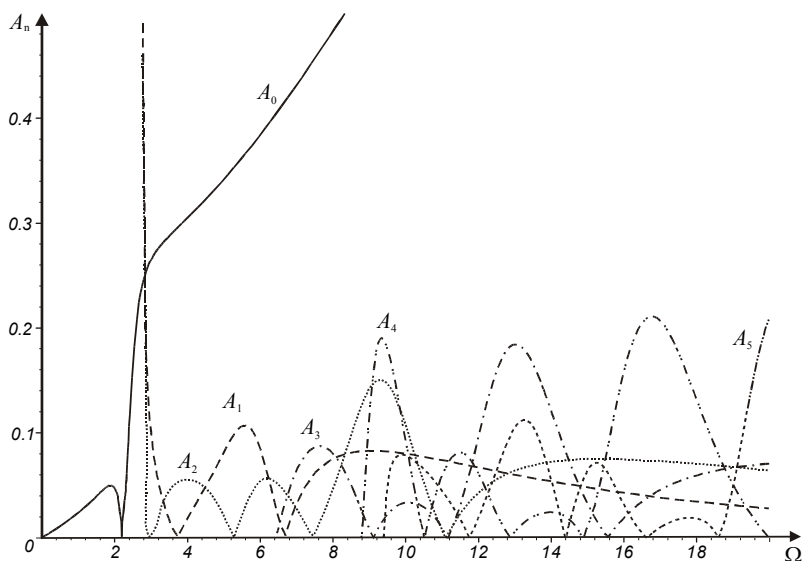
$$\begin{aligned}
 \Lambda_n &= \zeta / 2S'(k_n, \Omega); \quad g_{zn}(\Omega, z) = 2\eta ch\zeta sh\eta z + (\Omega^2 - 2k_n^2) ch\eta sh\zeta z / \zeta, \\
 g_{rn}(\Omega, \vartheta, z) &= 2k_n^2 ch\zeta ch\eta z - (2k_n^2 - \Omega^2) ch\eta ch\zeta z + 4k_n^2 \Omega^{-2} \zeta sh^{-1} \zeta g_{zn}(\Omega, 1) \sin^2 \vartheta ch\zeta z \\
 g_{\vartheta n}(\Omega, \vartheta, z) &= \left\{ (2k^2 - \Omega^2) ch\eta + 2k^2 \Omega^{-2} \zeta sh^{-1} \zeta g_{zn}(\Omega, 1) \cos 2\vartheta \right\} ch\zeta z \\
 S'(k, \Omega) &= 8(2k^2 - \Omega^2) k sh\zeta ch\eta + (2k^2 - \Omega^2)^2 k \left[ \frac{ch\zeta}{\zeta} ch\eta + \frac{sh\eta}{\eta} sh\zeta \right] - \\
 &- ch\zeta sh\eta \left( 8k\zeta\eta + 4k^3 \frac{\eta}{\zeta} + 4k^3 \frac{\zeta}{\eta} \right) - 4k^3 (\eta sh\zeta sh\eta + \zeta ch\zeta ch\eta)
 \end{aligned}$$

$k_n$  – волновое число (вещественное)  $n$ -ной симметричной моды, удовлетворяющее дисперсионному уравнению  $S(k_n, \Omega) = 0$ .

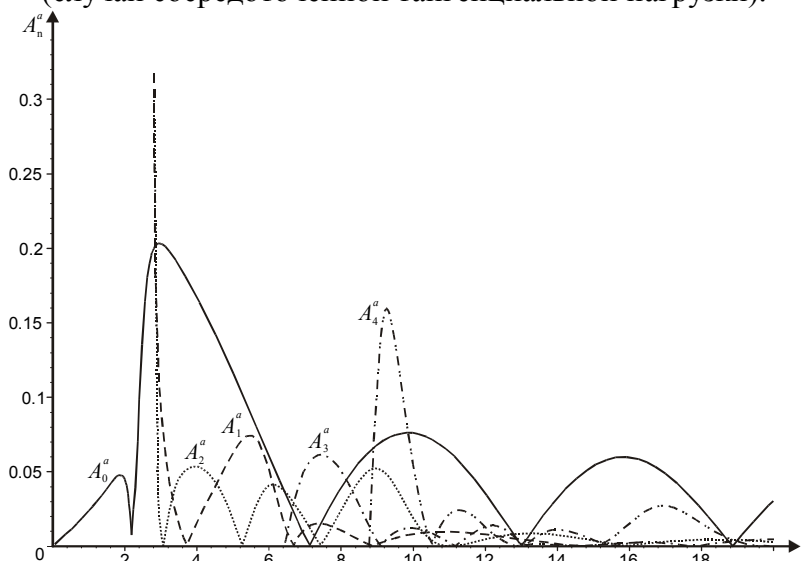
На рис. 2 представлены зависимости функций  $A_n(\Omega) = k_n^2 \Lambda_n(\Omega) g_{zn}(\Omega, 1)$  (см. (10)) от частоты  $\Omega$  при  $\nu = 0.3$  для первых пяти мод. Вертикальные перемещения, в основном, обусловлены низшей модой. Но если учесть конечность размеров площадки, к которой приложена тангенциальная нагрузка, то преобладания вклада низшей моды в поверхностные перемещения на всех частотах уже не будет (рис.3). В случае равномерно распределенной по круговой площадке радиуса  $a/h$  периодической нагрузки выражение для нормальных перемещений поверхности слоя имеет вид

$$u_z(r, \vartheta) = iPe^{-i\Omega t} \cos \vartheta \sum_{n=0}^{N(\Omega)} A_n^a(\Omega) H_1^{(1)}(k_n r) \tag{11}$$

где  $A_n^a(\Omega) = 2ha^{-1} k_n \Lambda_n(\Omega) g_{zn}(\Omega, 1) J_1(k_n ah^{-1})$ .



**Рис. 2.** Вертикальные перемещения поверхности слоя (случай сосредоточенной тангенциальной нагрузки).



**Рис. 3.** Вертикальные перемещения поверхности слоя (случай тангенциальной нагрузки, распределенной по площадке радиуса  $a/h=0.5, v=0.3$ ).

В отличие от низшей моды (рис. 4), у которой с ростом частоты достаточно быстро происходит концентрация энергии близи поверхности, у мод с более высокими номерами подобной локализации энергии не происходит. Распределения перемещений по  $z$  для мод с номером  $n > 1$  представляют осциллирующие функции, число осцилляций растет с ростом  $n$  (рис. 5). На определенных частотах амплитуда перемещений частиц внутри слоя может иметь значения большие, чем на поверхности.

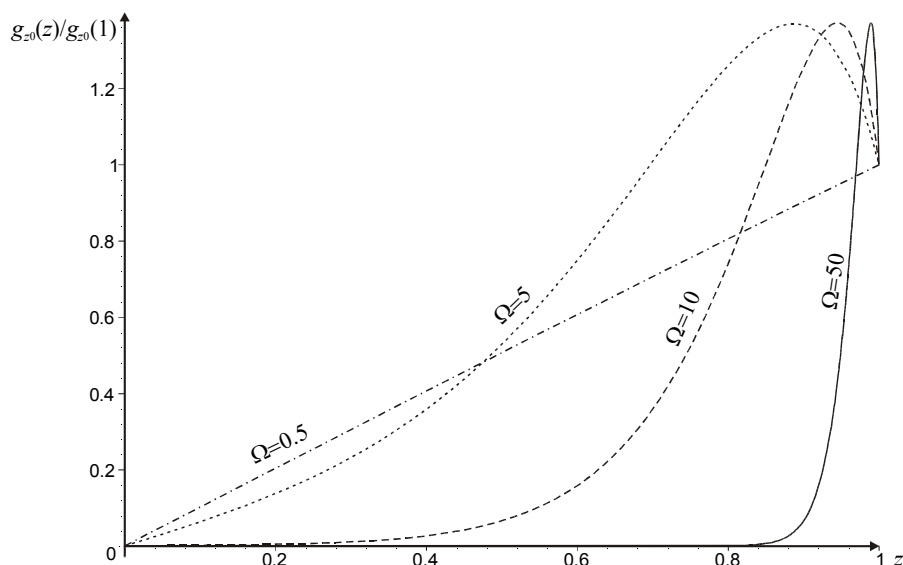


Рис. 4. Структура вертикальных перемещений по толщине слоя для низшей моды для некоторых частот.

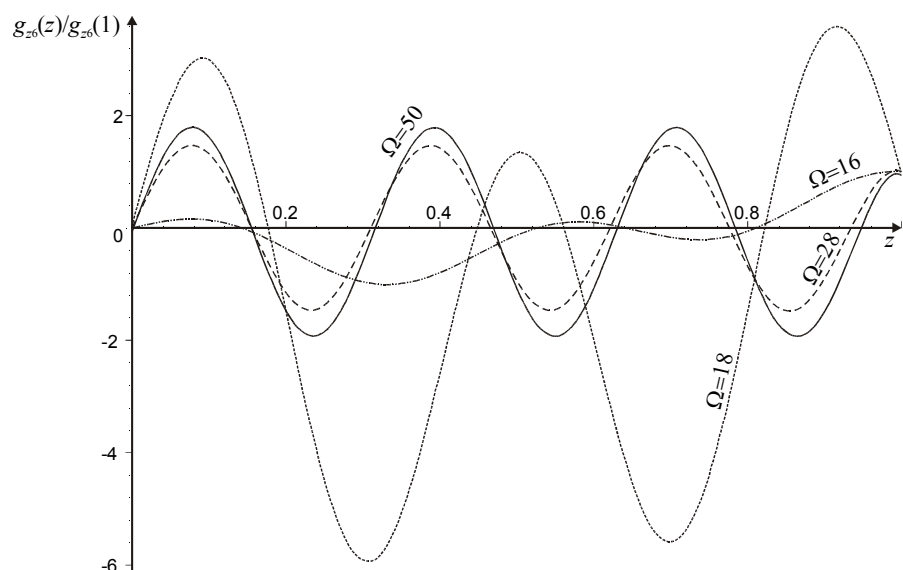


Рис. 5. Структура вертикальных перемещений по толщине слоя для моды с  $n = 6$  для некоторых частот.

Приведем выражение для энергии, переносимой  $m$ -ной симметричной модой от сосредоточенного источника касательной нагрузки

$$E_m = \frac{\Omega P^2}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\vartheta \left( \frac{2-2\nu}{1-2\nu} U_r^2 + U_g^2 + U_z^2 - \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{1}{k_m} U_r \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{k_m} U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{u}_z &= iPU_z H_1^{(1)}(k_m r), & U_z &= \cos \vartheta k_m^2 \Lambda_m(\Omega) g_{zm}(\Omega, z), \\ \hat{u}_r &= iPU_r H_0^{(1)}(k_m r), & U_r &= \cos \vartheta k_m \Lambda_m(\Omega) g_{rm}(\Omega, \vartheta, z) \\ \hat{u}_g &= iPU_g H_0^{(1)}(k_m r), & U_g &= \sin \vartheta k_m \Lambda_m(\Omega) g_{gm}(\Omega, \vartheta, z) \end{aligned}$$



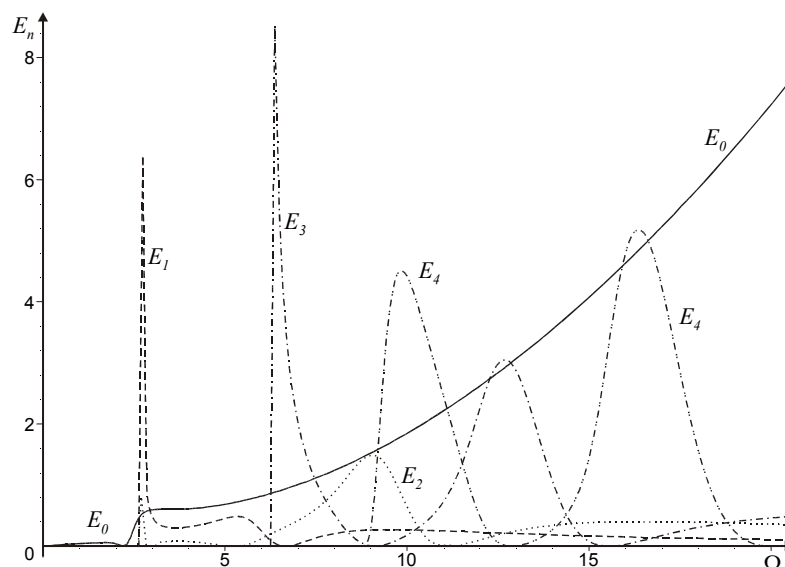


Рис. 6. Распределении мощности между различными излучаемыми модами для случая сосредоточенного источника тангенциальной нагрузки; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$

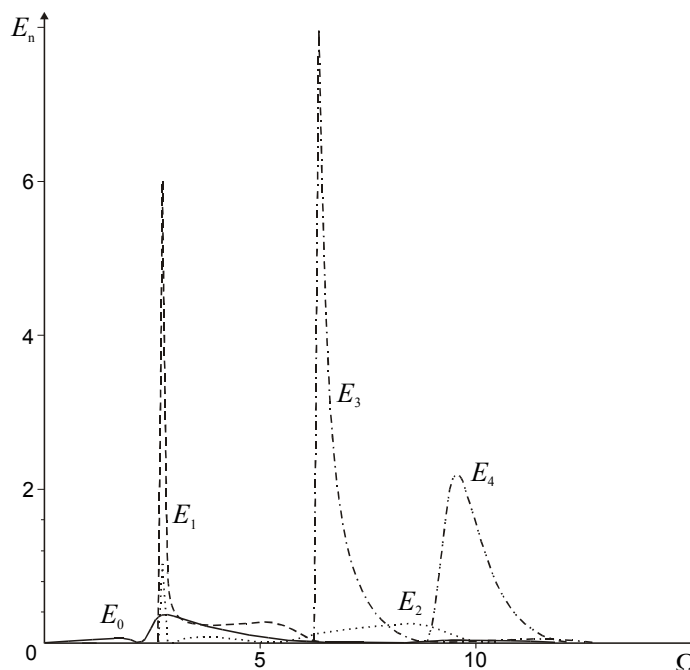


Рис. 7. Распределении мощности между различными излучаемыми модами для тангенциальной нагрузки, равномерно распределенной по площадке  $a/h=0.5, \nu = 0.3$ .

#### 4. Нормальная нагрузка.

При воздействии чисто периодической нагрузки в упругих волноводах в общем случае возникает сложное волновое поле из суммы симметричных и антисимметричных мод. Даже в тех редких случаях, когда возбуждаются только формы колебаний одного типа, допустим, симметричные (продольные), то и тогда помимо низшей симметричной моды ( $n = 0$ ) может существовать набор высших нормальных мод  $n > 1$  (собственных функций, отвечающих вещественным полюсам соответствующего фундаментального ре-

шения (функции Грина)), каждая из которых в определенном частотном диапазоне играет существенную роль в переносе энергии по волноводу. Для каждой моды характерен свой спектр нормальных и тангенциальных поверхностных смещений. Перемещения в дальней зоне в случае нормальной периодической нагрузки имеют вид:

$$\begin{aligned} u_r &= -i\pi P e^{-i\Omega t} \sum_{n=0}^{N(\Omega)} F_{nr}(\Omega) g_{nr}(\Omega, z) H_1^{(1)}(k_n r), \\ u_z &= i\pi P e^{-i\Omega t} \sum_{n=0}^{N(\Omega)} F_{nz}(\Omega) g_{nz}(\Omega, z) H_0^{(1)}(k_n r) \end{aligned} \quad (13)$$

где  $F_{nr}(\Omega) = \frac{k_n^2 \zeta}{S'(k_n, \Omega)}$ ,  $F_{nz}(\Omega) = \frac{k_n \zeta}{S'(k_n, \Omega)}$ ,

$$g_{nr}(\Omega, z) = (\Omega^2 - 2k_n^2) \zeta^{-1} \text{sh} \zeta \text{ch} \eta z + 2\eta \text{sh} \eta \text{ch} \zeta z$$

$$g_{nz}(\Omega, z) = (\Omega^2 - 2k_n^2) \zeta^{-1} \eta \text{sh} \zeta \text{sh} \eta z + 2k_n^2 \zeta^{-1} \eta \text{sh} \eta \text{sh} \zeta z$$

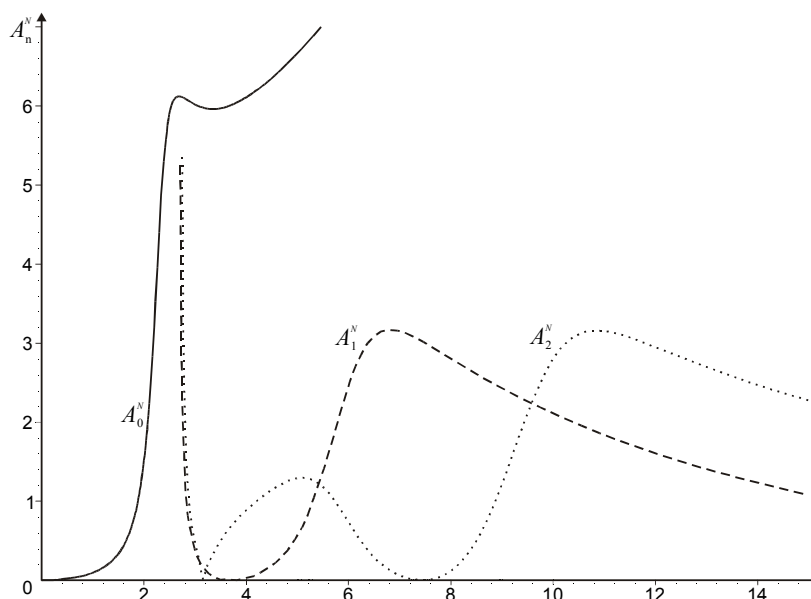
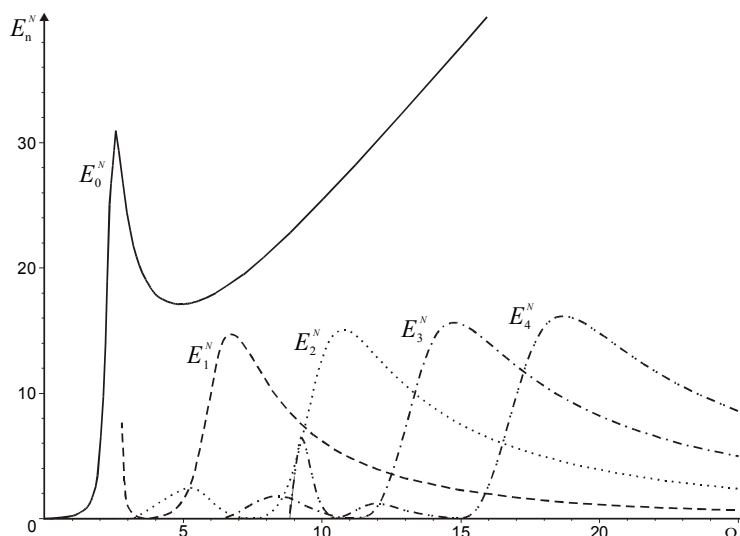


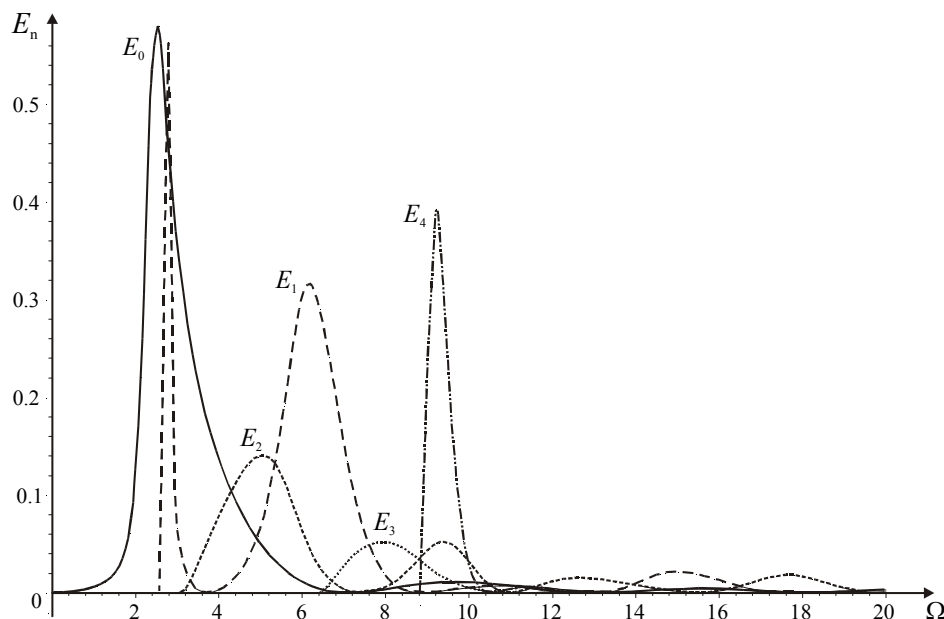
Рис. 8. Вертикальные перемещения поверхности слоя (случай сосредоточенной нормальной нагрузки).

Энергия, переносимая симметричными модами в случае нормальной нагрузки:

$$E_n = \frac{2\pi^2 P^2 \Omega k_n^2 \zeta^2}{(S')^2} \left\{ \frac{2-2\nu}{1-2\nu} k_n^2 \int_0^1 g_{nr}^2(\Omega, z) dz + \frac{2\nu}{1-2\nu} \int_0^1 g_{nr}(\Omega, z) \frac{\partial}{\partial z} g_{nz}(\Omega, z) dz + \int_0^1 g_{nz}^2(\Omega, z) dz \right\} \quad (14)$$



**Рис. 9.** Распределение мощности между различными излучаемыми модами для случая сосредоточенного источника нормальной нагрузки; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$



**Рис. 10.** Распределения мощности между различными излучаемыми модами для нормальной нагрузки, равномерно распределенной по площадке  $a/h=0.5, \nu = 0.3$ .

## 5. H/V отношение

Для разделения модовых составляющих может быть очень полезной знание отношения амплитуды горизонтальной компоненты смещения к вертикальной. Это отношение назовем H/V отношением. Для отношения амплитуд указанных компонент справедливо выражение:

$$\frac{A_{rn}}{A_{zn}} = \frac{k_n |(\Omega^2 - 2k_n^2) \text{sh}\zeta \text{ch}\eta + 2\zeta\eta \text{sh}\eta \text{ch}\zeta|}{|\Omega^2 \eta \text{sh}\eta \text{sh}\zeta|} \quad (15)$$

Для каждой моды это H/V отношение является характерной функцией частоты и далее

будет обозначаться  $\chi_n(\Omega)$ , где  $n$  – номер моды (рис. 11). Для низшей моды  $S_0$  функция  $\chi_0(\Omega)$  стремится при  $\Omega \rightarrow \infty$  к отношению, характерному для рэлеевской волны:

$$\chi_0 \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} \frac{[(2 - c_R^2 / c_s^2) - 2\sqrt{1 - c_R^2 / c_p^2} \sqrt{1 - c_R^2 / c_s^2}]}{c_R^2 / c_s^2 \sqrt{1 - c_R^2 / c_p^2}},$$

а при  $\Omega \rightarrow 0$

$$\chi_0 \xrightarrow{\Omega \rightarrow 0} (2c_s^2 / c_{pl}^2 - 1)(1 - c_{pl}^2 / c_p^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{cth}(\sqrt{1 - c_{pl}^2 / c_p^2}) + 2c_s^2 c_{pl}^{-2} (1 - c_{pl}^2 / c_s^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ctg} \sqrt{c_{pl}^2 / c_s^2 - 1},$$

где  $c_{pl} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu - \lambda^2(\lambda + 2\mu)^{-1}}{\rho}}$  – так называемая пластиночная скорость.

Для всех остальных мод отношение амплитуд  $\chi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , при  $\Omega \rightarrow \infty$  стремится к

$$\chi_n \xrightarrow{\Omega \rightarrow \infty} (1 - c_s^2 / c_p^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

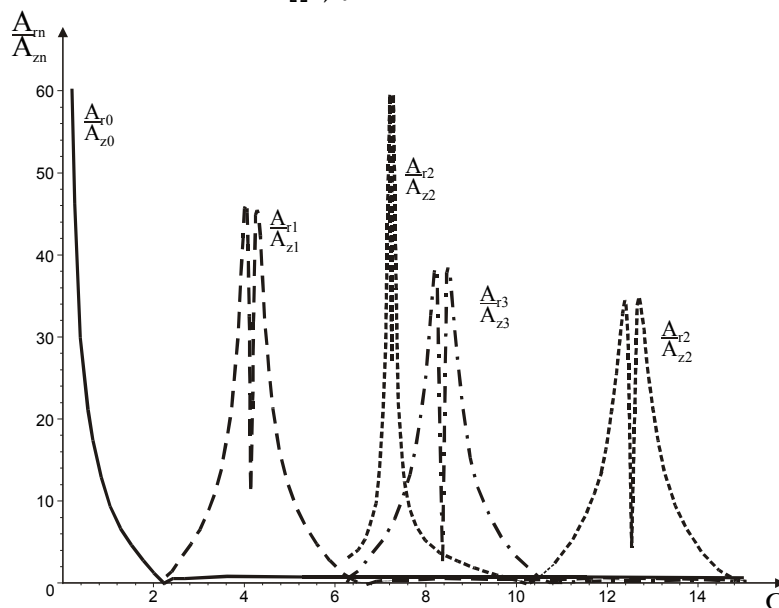


Рис. 11. Зависимость отношения амплитуды горизонтальной компоненты смещения к вертикальной от частоты (случай нормальной нагрузки).

Заключение. Проведен расчет амплитудно- частотных характеристик и энергобаланса волн (распределения мощности источника между модами) при воздействии осциллирующей нагрузки на поверхность слоя. Детально проанализирован спектр поверхностных смещений и его изменения в зависимости от коэффициента Пуассона материала.

## Литература

1. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid //Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, Vol. A203, pp. 1-42.
2. *De Hoop A.T.* A modification of Cagniard's method for solving seismic pulse problem // Appl. sci. res. **B**, 1960. Vol. 8. Pp. 349-356.
3. *Willis J.R.* Self-similar problems in elastodynamics // Philosophical Transactions of the Royal Society of London A. 1973. Vol. 274. Pp.435-491.
4. *Richards P.G.* Elementary solutions to Lamb's problem for a point source and their relevance to three-dimensional studies of spontaneous crack propagation // Bulletin of the Seismological Society of America, 1979, vol. 69, No. 4, pp.947-956.
5. *Петрашень Г.И., Молотков Л.А., Крауклис П.В.* Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. Метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики. -Л.: Наука, 1982. - 288с.
6. *Огурцов К.И., Петрашень Г.И.* Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // Ученые записки Ленинградского гос. университета № 149. Серия математических наук. Вып. 24. Динамические задачи теории упругости. - Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1951. С. 5-117.
7. *Петрашень Г.И., Марчук Г.И., Огурцов К.И.* О задаче Лэмба в случае полупространства // Ученые записки Ленинградского гос. университета № 135. Серия математических наук. Вып. 21. - Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1950. С. 71-118.
8. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. -М.: Наука, 1989. - 344с.
9. *Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F.* Elastic waves in layered media N.Y. :Mc. Grow-Hill. 1957.
10. *Ahenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids // Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1973
11. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах М.: Наука,1973.
12. *Aki K., Richards P.G.* Quantitative Seismology. Theory and Methods. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1980. Vol.1.
13. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. - Киев: Наукова думка, 1981. -284с.
14. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Наука, 1995.
15. *Sneddon I.N.* Fourier Transforms, McGraw-Hill, New-York, 1951.
16. *Schoch A.* Der Schalldurchgang durch Platen //Acustica, 1952. Vol. 2 N 1 P. 1-17.
17. *Меркулов Л.Г.* Затухание нормальных волн в пластинах, находящихся в жидкости // Акуст. ж. 1964. Т.10. №2. С. 206-212.
18. *Викторов И.А.* Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике . - М.: Наука, 1966, 170с.
19. *Заславский Ю.М., Митякова О.И.* Дисперсия поверхностных волн в структуре: упругие слой и полупространство в скользящем контакте // Акуст. ж. 1992, т. 38. №2, С. 296-303.
20. *Коган С.Я.* О сейсмической энергии, возбуждаемой источником, находящимся на поверхности // Изв. АН СССР. Сер. геофизическая. 1963. №7. С. 1000-1013.
21. *Гущин В.В., Докучаев В.П., Заславский Ю.М., Конюхова В.Д.* О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде

- //В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками. /Под ред. А.В. Николаева, И.Н. Галкина. М.: Наука, 1981. С. 113 - 118.
22. Глушков Е.В. Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве //ПММ 1983. Т. 47. Вып. 1. С. 94-100.
  23. Докучаев В.П., Разин А.В. Возбуждение упругих волн в однородном полупространстве поверхностными источниками // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1990. № 10. С. 81-87.
  24. Авербах В.С., Заславский Ю.М. Пространственно-угловые характеристики и энергетический баланс упругих волн, возбуждаемых в полупространстве источником типа центр расширения // Физика Земли, 1998. № 1. С. 49-53.
  25. Разин А.В. Излучение поверхностной и вытекающей волн на границе раздела твердое тело – газ // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. XLV. № 4. С. 354-360.
  26. Максимов Г.А., Меркулов М.Е., Кудрявцев В.Ю. Распределение энергии между различными типами сейсмических волн, излучаемых источником с произвольной диаграммой направленности в упругом полупространстве // Акустический журнал. 2003. Т. 49. № 3. С. 389-399.
  27. Зильберглейт А.С., Нуллер Б.М. Обобщенная ортогональность однородных решений в динамических задачах теории упругости // ДАН СССР. 1977. Т. 234. №2. С.333-335.
  28. Miller G.F., Pursey H. The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of semi-infinite isotropic solid // Proc. Roy. Soc., ser. A. 1954. V. 223. № 1155. P. 521-541.
  29. Miller G.F., Pursey H. On the partition of energy between elastic waves in semi-infinite solid // Proc. Roy. Soc., ser. A. 1955. V. 223. № 1192. P. 55-63.
  30. Белоконь А.В., Наседкин А.В. Волны в неоднородном по толщине изотропном слое, вызванные движущимися нагрузками//ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 305-313.
  31. Ерофеев В.И., Клюева Н.В., Солдатов И.Н. Использование спектров нормальных и тангенциальных смещений волн Лэмба в задачах выделения одномодовой составляющей // Дефектоскопия. 2002. № 12. С. 34-42

*Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Нижний Новгород, Россия.*

*Поступила: 08.10.08.*