

УДК 629.1

ДИНАМИКА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ТРАНСПОРТА НА МАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ

В.И. Кувыкин, В.В. Кажаяев

Рассмотрены динамические эффекты, обусловленные вихревыми токами в проводящей путевой структуре высокоскоростного наземного транспорта с неконтактным подвесом и высокоскоростных поездов с вихретоковыми тормозами. Показано, что при достаточно высоких скоростях движения возможно возникновение колебаний силового магнита. Исследована устойчивость состояния равновесия при моделировании магнита токовыми нитями.

Известно, что вихревые токи в проводящей путевой структуре используются для электродинамического подвешивания вагонов высокоскоростного наземного транспорта (ВСНТ) [1]. Однако, при определенных условиях силы, вызванные вихревыми токами, могут привести к неприемлемым колебаниям движущегося тела. При этом происходит перекачка энергии прямолинейного движения тела в энергию колебаний.

Обеспечение устойчивости движения является необходимым условием безаварийной эксплуатации высокоскоростного транспорта, поэтому вопрос о возникновении таких колебаний и методы их устранения является практически важным. К настоящему времени [2,3,4] показана возможность возникновения вертикальных колебаний магнита при движении с постоянной скоростью в предположении, что в горизонтальной плоскости его движение устойчиво. Задача исследования устойчивости стационарного движения в горизонтальном направлении изучена недостаточно и, несомненно, представляет интерес при решении динамических задач. Отметим, что аналогичные задачи возникают при изучении динамики проводящего тела в неконтактных подвесах и при исследовании колебаний сердечника в магнитном подвесе.

Вопрос о влиянии вихревых токов на динамику экипажа возникает не только при создании электродинамического подвеса, в котором вихревые токи используются для подвеса экипажа и во многом определяют характер его движения, но и для поездов с электромагнитным подвесом, и при использовании вихретоковых тормозов для колесного высокоскоростного наземного транспорта.

В системах с электромагнитным подвесом присутствует для улучшения динамических характеристик, как правило, вторичная упругая подвеска - "электромагнитная лыжа". Силовые электромагниты крепятся к вагону при помощи специальной упругой подвески.

Следующий вопрос, который возникает перед разработчиками поездов с неконтактным подвесом - это возможность моделирования динамики экипажа на более простых и не требующих существенных затрат установках с вращающейся путевой структурой. Движение вагона ВСНТ обычно изучается на установках с вращающимся барабаном [5]. При таком моделировании остается открытым вопрос об их адекватности реальному движению и об интерпретации результатов [6].

Моделирование движения поездов с неконтактным подвесом над проводником.

Постановка задачи. Математическая модель. Исследуем устойчивость в малом положения магнита над вращающимся цилиндрическим барабаном при возмущениях магнита в горизонтальном направлении. Будем предполагать, что магнит имеет упругую подвеску. Рассмотрим вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω бесконечный проводящий цилиндр радиуса R . Над ним расположен магнит, к которому приложена постоянная сила F_e от внешней системы (рис.1).

Введем инерциальную декартову систему координат $Oxyz$, а в ней цилиндрические координаты ρ, φ, z и систему координат $O_1\xi\eta\zeta$, жестко связанную с источниками поля (рис.1). Дополнительно предположим, что магнит может совершать движения лишь параллельно оси Oy .

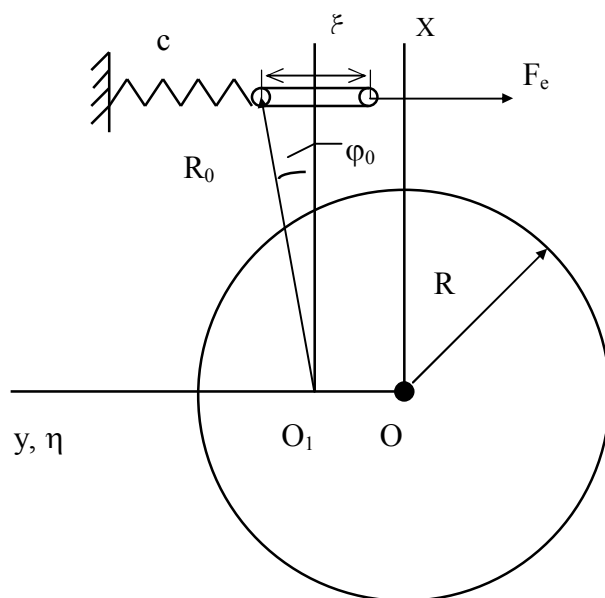


Рис. 1. Расчетная схема для определения сил, действующих на источник магнитного поля над вращающимся барабаном.

Для описания движения в системе $Oxyz$ запишем следующие уравнения:

1. Уравнения движения центра масс магнита

$$m\ddot{y} + h\dot{y} + cy = F_y + F_e \quad (1)$$

где m - масса магнита, h , c - параметры внешнего закрепления ($h = c = 0$, если тако- го закрепления нет), F_y - проекция электродинамической силы \mathbf{F} , которая выража- ется через тензор натяжений Максвелла

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \int_S \left\{ (\mathbf{H}^e, \mathbf{e}_\rho) \mathbf{H}^e - \frac{1}{2} (\mathbf{H}^e, \mathbf{H}^e) \mathbf{e}_\rho \right\} dS.$$

2. Уравнения для поля внутри и вне проводящего цилиндра и граничные условия к ним. Исходное поле представим скалярным потенциалом

$$\mathbf{H}^0 = \nabla U^0. \quad (2)$$

В цилиндрической системе координат скалярный потенциал запишем в виде

$$U^0 = \sum_n c_n \rho^{|n|} e^{in\varphi}, \quad (3)$$

коэффициенты c_n будем считать известными.

В частности, запишем их представления в случае, когда источник поля модели- руется двумя токовыми нитями, находящимися на расстоянии $2a$ друг от друга, по которым течет ток I в разных направлениях. Токовые нити при отсутствии смещения ($y = 0$) находятся на расстоянии R_0 от оси вращения (см. рис.1). Такая модель для неподвижного магнита изучалась в работе [6]. В этом случае коэффициенты c_n опре- деляются равенством

$$c_n = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_0^{|n|}} \frac{\sin |n| \varphi_0}{|n|}, \quad (4)$$

где φ_0 - угол, величина которого $\varphi_0 = \arcsin(a/R_0)$.

Магнитное поле \mathbf{H}^i внутри движущегося проводника в квазистационарном при- ближении (токи смещения не учитываются) описывается уравнениями

$$\begin{aligned} -\mu_0 \sigma (\partial \mathbf{H}^i / \partial t) + \mu_0 \sigma \operatorname{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{H}^i] + \Delta \mathbf{H}^i &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H}^i &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathbf{v} - линейная скорость точек тела, μ_0 - магнитная постоянная.

Потенциальное поле вне проводника \mathbf{H}^e удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^e = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H}^e = 0 \quad (6)$$

и может быть представлено в виде суммы исходного поля источников и индуцирован- ного вихревыми токами вне проводника поля, затухающего на бесконечности.

На поверхности цилиндра S выполнены граничные условия

$$\mathbf{H}^e|_S = \mathbf{H}^i|_S. \quad (7)$$

Стационарное движение. Рассмотрим случай, когда магнит неподвижен. Опре- делим силу $F_e = -F_y$, необходимую для обеспечения равновесия магнита в точке $y = 0$, и подъемную силу, которую сравним с силой левитации при движении магнита над проводящим плоским полотном. Решение задачи (3) - (7) будем искать в следую-

щей форме

$$\mathbf{H}^i = \sum_n \text{rot}(\mathbf{e}_z \psi_n) \quad , \quad (8)$$

где функция ψ_n удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца

$$\Delta \psi_n + k_n^2 \psi_n = 0 \quad ,$$

частные решения которого выражаются через функции Бесселя

$$\psi_n = A_n e^{in\varphi} J_n(k_n \rho) \quad , \quad (9)$$

где $k_n^2 = in\Omega_*/R^2$, $\Omega_* = \mu_0 \sigma \Omega R^2$.

Таким образом, поле внутри проводника определяется соотношениями (8,9).

Решение уравнений для поля вне проводника представим следующим образом

$$\mathbf{H}^I = \sum_n a_n \rho^{-|n|} e^{in\varphi} \quad . \quad (10)$$

Неизвестные коэффициенты в (4.9) и (4.10) определяются из граничных условий. Необходимые для дальнейших вычислений коэффициенты a_n в (10) равны

$$a_n = R^{|n|} c_n \Phi_n(n\Omega_*) \quad , \quad (11)$$

где

$$\Phi_n(n\Omega_*) = -J_{n+1}(k_n R) / J_{n-1}(k_n R) \quad . \quad (12)$$

Функция (12) нормирована таким образом, чтобы в высокоскоростном пределе $\Omega_* \Rightarrow \infty$ действительная часть $\text{Re} \Phi_n(n\Omega_*) \Rightarrow 1$. Качественная зависимость функций $\text{Re} \Phi_n(n\Omega_*)$ и $\text{Im} \Phi_n(n\Omega_*)$ от безразмерного параметра Ω_* аналогична зависимости, представленной на рис. 2.

По известному полю определим подъемную F_x и тормозящую F_y силы, воспользовавшись формулами [4]

$$F_x = \frac{1}{\mu_0} \frac{l}{R} \sum_{\substack{m \\ m \neq 0}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |r_m| \text{Re}(c_{m,n} a_{m,n+1}^* + a_{m,n} c_{m,n+1}^*)$$

$$F_y = \frac{1}{\mu_0} \frac{l}{R} \sum_{\substack{m \\ m \neq 0}}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |r_m| \text{Im}(c_{m,n} a_{m,n+1}^* + a_{m,n} c_{m,n+1}^*)$$

имеем

$$F_x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \text{Re}(c_{n+1}^* a_n) \quad , \quad (13)$$

$$F_y = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \operatorname{Im} \left(c_{n+1}^* a_n \right), \quad (14)$$

где $*$ - знак сопряжения.

Заметим, что решение уравнений электродинамики для токовых нитей, совпадает с приведенным в работе [6], хотя получено другим способом. Однако, при вычислении сил в этой работе допущена неточность. Расчетные формулы для пондеромоторных сил имеют вид

$$F_x = \frac{\mu_0 I^2}{\pi R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2n} \left[\cos \varphi_0 - \cos (2n+1)\varphi_0 \right] \operatorname{Re} \Phi_n(n\Omega_*), \quad (15)$$

$$F_y = \frac{\mu_0 I^2}{\pi R_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2n} \left[\cos \varphi_0 - \cos (2n+1)\varphi_0 \right] \operatorname{Im} \Phi_n(n\Omega_*). \quad (16)$$

В высокоскоростном пределе $\Omega_* \Rightarrow \infty$ для подъемной силы (15) будем иметь

$$F_x = \frac{\mu_0 I^2}{\pi R_0} \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \frac{\cos \varphi_0 - \cos 3\varphi_0}{1 + \beta^4 - 2\beta^2 \cos 2\varphi_0}, \quad \beta = \frac{R}{R_0}. \quad (17)$$

Плоское полотно. Переходя к пределу $R \Rightarrow \infty$ в формуле (17) и сохраняя неизменной высоту подвеса магнита b над проводником, получим выражение для силы подъема в высокоскоростном пределе при движении над плоской границей

$$F_x = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b} \frac{a^2}{a^2 + b^2}. \quad (18)$$

Расчетная формула (18) совпадает с зависимостью, приведенной в статье Л.Дэвиса и Р.Бочертса [5], в которой рассмотрено движение токовых нитей над плоским полотном.

Таким образом, исследование левитации над проводящей плоскостью и цилиндром достаточно большого радиуса не должно приводить к существенным различиям.

Устойчивость движения. Исследуем устойчивость состояния равновесия $y = \dot{y} = 0$ при моделировании магнита токовыми нитями. Рассмотрим перечисленные выше условия (1) - (7) с учетом возмущений

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1, \quad y = y_1,$$

где \mathbf{H}_0 относится к невозмущенному движению. Выражение для потенциала источников поля (3), записанное в системе $O_1\xi\eta\zeta$, преобразуем в систему $Oxyz$ с точностью до линейных членов по смещению $\varepsilon_1 = y_1/R_0$:

$$U^0 = \sum_n c_n \rho^{|n|} e^{in\varphi} - \varepsilon_1 \sum_n c_n^{(1)} \rho^{|n|} e^{in\varphi}, \quad (19)$$

где $c_n^{(1)} = i R_0 \operatorname{sign}(n) (|n|+1) c_{|n|+1}$, c_n - определяется соотношениям (4).

Линеаризованные уравнения и граничные условия к ним допускают частные ре-

шения, пропорциональные $e^{\lambda t}$ (здесь λ - характеристическое число). Будем считать положение равновесия устойчивым в малом, если все λ имеют отрицательные действительные части и неустойчивым, если хотя бы одно λ имеет положительную действительную часть. В случае непрерывной зависимости характеристических чисел от параметров задачи изменение степени неустойчивости происходит при появлении мнимого $\lambda = i\omega$. Таким образом, для построения границ D-разбиения требуется рассмотреть возмущенные движения, когда комплексные амплитуды изменяются пропорционально $e^{i\omega t}$.

При решении уравнений, описывающих поле внутри проводника (5), для возмущенного движения в отличие от стационарного движения добавляется производная $\partial \mathbf{H}^i / \partial t = i\omega \mathbf{H}_1^i e^{i\omega t}$, а параметр k_n^2 будет иметь вид

$$k_n^2 = in(\Omega_* + \omega_*) / R^2, \quad (20)$$

где $\omega_* = \mu_0 \sigma \omega R^2$.

Подставляя $y = y_1 e^{i\omega t}$ в уравнение (1), получим

$$-m\omega^2 + ih\omega + c = f_c + if_h. \quad (21)$$

Здесь силы вычисляются аналогично случаю стационарного движения и равны $f_c = f_{1c} + f_{2c}$,

$$f_{1c} = 2 \frac{\mu_0 I^2}{\pi R_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2n} \sin n\varphi_0 \sin (n+2)\varphi_0 \operatorname{Re} \Phi_n(n\Omega_*), \quad (22)$$

$$f_{2c} = -\frac{\mu_0 I^2}{\pi R_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2n} \sin^2 (n+1)\varphi_0 \operatorname{Re} \Phi_{1n}(n\Omega_*, \omega_*), \quad (23)$$

$$f_h = -\frac{\mu_0 I^2}{\pi R_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{R}{R_0} \right)^{2n} \sin^2 (n+1)\varphi_0 \operatorname{Im} \Phi_{1n}(n\Omega_*, \omega_*), \quad (24)$$

где зависящая от скорости вращения функция имеет вид

$$\Phi_{1n}(n\Omega_*, \omega_*) = \Phi_n(n\Omega_* + \omega_*) + \Phi_n(-n\Omega_* + \omega_*).$$

Используя свойства функции Φ_n , можно записать

$$\operatorname{Im} \Phi_{1n}(n\Omega_*, \omega_*) = \operatorname{Im} [\Phi_n(n\Omega_* + \omega_*) - \Phi_n(n\Omega_* - \omega_*)], \quad (25)$$

$$\operatorname{Re} \Phi_{1n}(n\Omega_*, \omega_*) = \operatorname{Re} [\Phi_n(n\Omega_* + \omega_*) + \Phi_n(n\Omega_* - \omega_*)]. \quad (26)$$

В высокоскоростном пределе ($\Omega_* \Rightarrow \infty$) для силы смещения получим выражение

$$f_c = 2 \frac{\mu_0 I^2}{\pi R_0^2} \beta^4 \frac{(\beta^2 - \cos 2\varphi_0)(\cos 2\varphi_0 - 1)}{(1 - \beta^2)^2 (1 + \beta^4 - 2\beta^2 \cos 2\varphi_0)}, \quad \beta = \frac{R}{R_0}. \quad (27)$$

Из анализа (27) следует, что если размеры магнита малы по сравнению с радиусом цилиндра $a \ll R$, то $f_c > 0$, т.е. электродинамическая сила уводит магнит из

состояния равновесия. Переходя к плоскому полотну $R \Rightarrow \infty$, получим, что сила $f_c = 0$. Таким образом, указанный эффект обусловлен кривизной поверхности, поэтому при изучении динамики магнита над проводящим барабаном возможны отличия от результатов, которые наблюдаются при его движении над плоской поверхностью.

Если диск не вращается ($\Omega = 0$), то, как следует из свойств функции $\text{Im } \Phi_{1n}(n\Omega_*, \omega_*)$, в расчетных формулах (25) $\text{Im } \Phi_{1n}(n\Omega_*, \omega_*) > 0$ и, поэтому $f_h < 0$, что соответствует демпфированию колебаний магнита. При малых значениях параметра $\omega_* \ll 1$ можно записать приближенное значение для функции (25)

$$\text{Im } \Phi_{1n}(n\Omega_*, \omega_*) = 2[\text{Im } \Phi_{1n}(n\Omega_*)]' \omega_* + O(\omega_*^2). \quad (28)$$

Как следует из этого выражения, на падающем участке характеристики при $\text{Im } \Phi_n$ при $\Omega_* > \Omega_{0*}$ (рис.2) производная отрицательна и может появиться дестабилизирующая сила.

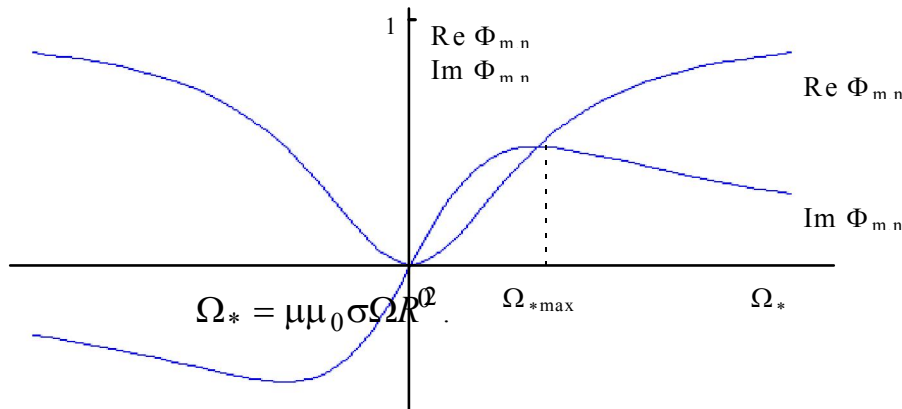


Рис.2. Зависимость функции $\Phi_{m,n}$ от безразмерного параметра

$$\Omega_* = \mu\mu_0\sigma\Omega R^2.$$

Составляющая F_x^d зависит от $\text{Re } \Phi_{m,n}$ и, следовательно, инвариантна относительно смены направления вращения. При увеличении скорости вращения она возрастает и в высокоскоростном пределе $\sigma\Omega \Rightarrow \infty$ стремится к наибольшему значению.

Поведение тормозящего момента M_z и составляющей F_y определяется мнимой частью $\text{Im } \Phi_{m,n}$. Эти величины изменяют свой знак при изменении направления вращения. Потери растут пропорционально магнитному числу Рейнольдса. При дальнейшем увеличении скорости они достигают максимума и затем начинают уменьшаться пропорционально $\sqrt{\Omega_*}$ и стремятся к нулю при $\sigma\Omega \Rightarrow \infty$.

Следует отметить, что подобное поведение частотных функций при различных

скоростях вращения ротора является общей чертой пондеромоторного взаимодействия проводящих тел с магнитным полем.

Из (25) можно видеть, что для некоторого значения Ω_{1*} существует такое значение параметра ω_{1*} , для которого $\text{Im } \Phi_{1n} = 0$. При $\omega_* > \omega_{1*}$ электродинамическая сила является демпфирующей, при $\omega_* < \omega_{1*}$ - дестабилизирующей.

Выделяя действительную и мнимые части в выражении (21), получим параметрическое уравнение D-кривой:

$$\frac{v^2}{\Omega^2} = \frac{\omega^2}{\Omega^2} + \frac{f_c}{m\Omega^2}, \quad h = f_h/\omega, \quad (29)$$

где частота $v^2 = c/m$.

Качественное поведение D-кривой в практически интересном для движения высокоскоростного наземного транспорта случае высоких скоростей $\Omega_* > \Omega_{0*}$ показано на рис.3. При $\omega_* = 0$ имеется особая прямая. На рис. 3. штриховка нанесена так, что переход через D-кривую со штрихованной стороны на не штрихованную соответствует появлению двух комплексно-сопряженных характеристических чисел с положительной вещественной частью, что означает увеличение степени неустойчивости.

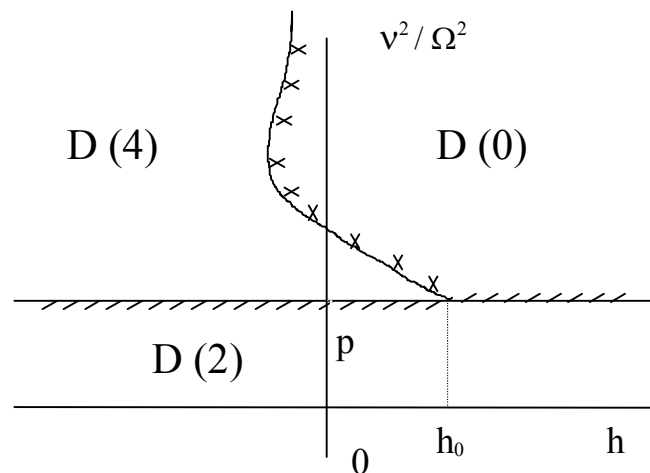


Рис. 3. D-разбиение плоскости параметров задачи на области с различной степенью неустойчивости.

Анализ D-разбиения плоскости параметров h, c показывает, что при отсутствии закрепления ($h = c = 0$) подвеска магнита в точке $y = 0$ становится неустойчивой.

тойчивой. Параметр p , определяющий особую прямую, монотонно возрастает с ростом скорости. Если выполняются условия $v^2/\Omega^2 < p$, в системе возникают нарастающие колебания.

При переходе к движению над плоским полотном параметр $p = 0$, т.е. колебаний, вызванных составляющими силы f_c , не возникает.

Если коэффициент внешнего демпфирования $h < h_0$, то при больших скоростях относительного движения проводящего барабана и магнита положение равновесия при отсутствии упругого закрепления $c = 0$ неустойчиво. Этот вывод справедлив и для плоского полотна.

Другими словами, основной вывод заключается в том, что при отсутствии в системе достаточного демпфирования при высоких скоростях положение равновесия неустойчиво. Практически это означает, что вихревые токи в проводящем пути могут вызывать колебания силовых магнитов и связанного с ними вагона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Powell J.R., Danby G.R. High speed transport by magnetically suspended trains // ASME, 1966, Publ no. 66WA/RR5.
2. Байко А.В., Воеводский К.Э. О вертикальных колебаниях в системе электродинамического подвешивания экипажей ВСНТ // Электромеханика. № 11. 1979. С.983-990. (Изв. вузов)
3. Кочетков В.М. О вертикальной неустойчивости электродинамического подвешивания // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1979. № 5. С. 176-178.
4. Кувькин магнитное трение в неконтактных подвесах. Издание 2-е, Нижний Новгород: Изд-во "Интелсервис", 2007,-108 с.
5. Vocherts R.H., Davis L.S. Force on a coil moving over conducting surface including edge and channel effects // J.Appl.Phys., 1972. V.43. No. 5. P. 2418-2427.
6. Кочетков В.М., Макаров Е.Ф., Череватый А.В., Байков В.В. Анализ соответствия левитационных параметров вращающихся и линейных моделей электродинамического подвеса // Изв.вузов. Электромеханика. 1979. № 11. С.991-999.

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН. Россия. Нижний Новгород

Поступила: 14.08.08.