

УДК 534.1

## ХАОТИЧЕСКИЕ ВРАЩЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ РАМКИ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

**В.И. Кувыкин, В.В. Кажаяев**

В работе рассмотрена динамика проводящей рамки в переменном магнитном поле. Показано, что наряду с регулярными движениями имеются хаотические вращения рамки, обусловленные наличием вихревых токов в проводящем материале, которые могут приводить к неустойчивости и, как следствие, к качественно различным типам движения. Причем хаотические колебания несбалансированной рамки в переменном поле существуют в области средних частот.

Переменное поле может повлиять на вращение твердого тела. В области больших и малых значений магнитного числа Рейнольдса вращение проводящего тела в однородном поле успешно исследовано при помощи асимптотических методов механики [1]. Причем при малых числах Рейнольдса вихревые токи оказывают стабилизирующее воздействие, а при больших значениях положение равновесия может оказаться неустойчивым. В монографии [1] исследовано движение проводящего несбалансированного шара с закрепленной осью вращения в высокочастотном переменном поле (большое значение магнитного числа Рейнольдса) и показано, что существуют «раскачивающие» силы и положение равновесия становится неустойчивым в малом. В области «средних» частот (когда не выполняется приближение больших или малых значений магнитного числа Рейнольдса) приходится прибегать к численному моделированию. Покажем, что именно в этой области возможны хаотические движения. И изучим еще один вопрос, который неизбежно возникает при исследовании влияния магнитного трения в проводящих элементах на динамику твердого тела - это поведение объекта при неустойчивых режимах движения.

В последние десятилетия большой интерес уделяется хаотическим колебаниям, которые могут возникать в нелинейных системах. В современной литературе термин «хаотический» применяется к таким движениям в детерминированных системах, траектории которых обнаруживают сильную зависимость от начальных условий [2,3]. Новым в хаотической динамике стало открытие внутреннего порядка, который обещает сделать возможным предсказание определенных свойств зашумленных систем.

При математическом исследовании динамических систем используют отображение Пуанкаре [2,3]. В колебательных системах с периодической вынуждающей силой отображение Пуанкаре можно получить, стробоскопически измеряя динамические переменные в моменты, соответствующие определенной фазе вынуждающего воздействия.

Вихревые токи могут привести к хаотическим колебаниям. Так в работе [2] приведены экспериментальные данные по хаотическим боковым движениям модели транспорта на магнитной подушке (электродинамический подвес), полученные с помощью кино съемки.

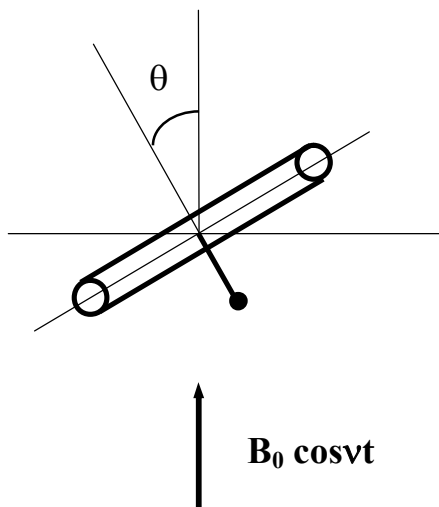


Рис. 1. Проводящая несбалансированная рамка в переменном поле.

Рассмотрим эффекты, связанные с индуцированными токами в проводящем материале в переменном магнитном поле  $B_0 \cos vt$ , используя простейшую модель движения несбалансированной проводящей рамки (рис.1) с фиксированной осью вращения (так называемый магнитоэлектрический гаситель колебаний [4,5]).

Система дифференциальных уравнений, описывающая ее движение, записывается следующим образом

$$\begin{cases} I \ddot{\theta} + (mgl + 2JabB_0 \cos vt) \sin \theta = 0 \\ LJ + R J = B_0 S (v \sin vt \cos \theta + \dot{\theta} \cos vt \sin \theta) \end{cases} \quad (1)$$

где  $\theta$  - отклонение рамки от вертикали,  $J$  - ток,  $I$  - момент инерции рамки,  $m$  - масса груза,  $l$  - расстояние от груза до оси вращения,  $g$  - ускорение свободного падения,  $2a$ ,  $b$  - ширина и длина рамки,  $L$  - индуктивность,  $R$  - сопротивление,  $S$  - площадь контура ( $S = 2a \cdot b$ ), точкой обозначена производная по времени.

Приведем уравнение (1) к безразмерному виду

$$\begin{cases} \ddot{\theta} + (p + \lambda J_* \cos v_* \tau) \sin \theta = 0 \\ \dot{J}_* + J_* = v_* \sin v_* \tau \cos \theta + \dot{\theta} \cos v_* \tau \sin \theta \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $T = 1/\omega_0 = L/R$  - постоянная времени,  $v_* = vT$  - частота внешнего поля,  $\tau = \omega_0 t$  - безразмерное время,  $J_0 = B_0 S / L$  - характерное значение тока,

$J_* = J / J_0$  - безразмерный ток,  $p = \frac{mgl}{I\omega_0^2}$  и  $\lambda = \frac{J_0 B_0 S}{I\omega_0^2}$  - безразмерные

электромеханические параметры.

Для рамки, вращающейся со скоростью  $\omega$  в постоянном поле, функция  $\Phi(\omega T)$ , описывающая зависимость осредненного за период вращения тормозящего момента от безразмерной угловой скорости  $\omega_* = \omega T$  имеет вид

$$\Phi(\omega T) = \frac{\omega T}{(\omega T)^2 + 1} \quad (3)$$

Максимум этой функции достигается при значении  $\omega T = 1$ , т.е. в размерных переменных  $\omega = \omega_0$ . Эта функция, так же как и мнимая часть частотной функции

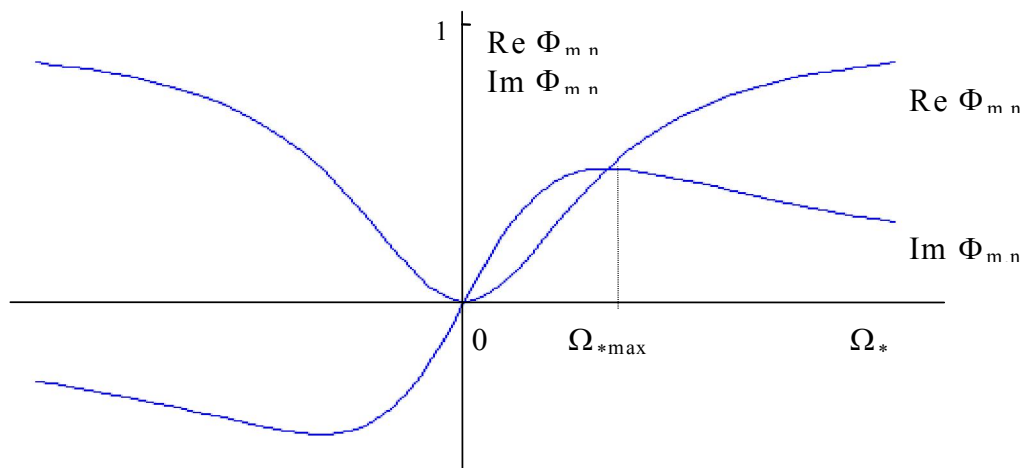


Рис.2. Зависимость функции  $\Phi_{m,n}$  от безразмерного параметра

$$\Omega_* = \mu\mu_0\sigma\Omega R^2.$$

(рис.2), при малых значениях пропорциональна безразмерной угловой скорости, достигает экстремума и стремится к нулю при  $\Omega_* \Rightarrow \infty$ .

Приведем численное решение системы дифференциальных уравнений (2). На рис.3. показано распределение точек в сечении Пуанкаре на плоскости  $\theta$  (по оси абсцисс),  $\dot{\theta}$  (по оси ординат), характерное для хаотических колебаний, при следующих значениях параметров:  $v_* = 0.9$ ,  $\lambda = 10$ ,  $p = 0.1$ . Начальные условия приняты  $\theta = 0.2$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $J_* = 0$ . Использовано 20000 точек, отображение проводилось через период изменения внешнего поля.

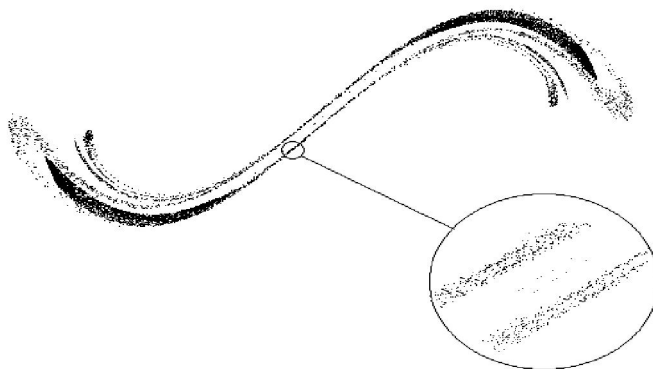


Рис. 3. Распределение точек в сечении Пуанкаре на плоскости  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  при значениях параметра  $v_* = 1,7$ .

Увеличенный участок выделенной на рис. 3 области на рисунке демонстрирует автомодельную структуру меньшего масштаба. Отметим, что частота внешнего поля  $\nu_* = 0.9$  находится в области «средних» частот, близких к точке экстремума функции (3). При значениях  $\nu_* = 1.7$  рамка колеблется около положения  $\theta = \pi / 2$ . На рис.4 приведено распределение точек в сечении Пуанкаре при частотах изменения внешнего поля  $\nu_* = 1.8$ , когда возникают хаотические движения (рамка вращается то в одну, то в другую сторону). При многократном обновлении экрана монитора структура, приведенная на рисунке, сохранялась (4000 точек). При больших частотах  $\nu_* \gg 1$  возникает вращение рамки в одну сторону. В этом случае проводящая рамка играет роль своеобразного двигателя.



Рис. 4. Распределение точек в сечении Пуанкаре на плоскости  $\theta, \dot{\theta}$  при значениях параметра  $\nu_* = 1,7$ .

Таким образом, численное моделирование показывает, что вихревые токи в проводящем материале могут приводить к неустойчивости положения равновесия  $\theta = 0$  и к качественно различным типам движения. Причем хаотические колебания несбалансированной рамки в переменном поле существуют в области средних частот.

### Литература

1. Мартыненко Ю.Г. Движение твердого тела в электрических и магнитных полях. М.: Наука, 1988. 368 с.
2. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1991. 311 с.
3. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1967. 424 с.
4. Терентьев А.Н. Исчезновение магнитного трения под действием слабого переменного поля при левитации сверхпроводника // СФХТ. 1990. Т.3. №4. С.763-766.
5. Кувькин В.И. Магнитное трение в неконтактных подвесах. Издание 2-е, Нижний Новгород: Изд-во "Интелсервис", 2007,-108 с.

*Нижегородский филиал Института машиноведения РАН. Россия. Нижний Новгород*  
*Поступила: 31.07.08.*