УДК 517.929.2

Асимптотическое поведение решений одномерного дискретного уравнения Шредингера с колебательно убывающим потенциалом

Бурд В.Ш., Нестеров П.Н.[1]

Ярославский государственный университет,

150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

В работе строится асимптотика решений дискретного уравнения Шредингера. Для исследования уравнения используются усредняющие замены переменных. Кроме того, при построении асимптотики существенная роль отводится разностному аналогу теоремы Левинсона.

Рассмотрим разностное уравнение второго порядка

$$x(n+2) - 2x(n+1) + \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}p(n)\right)x(n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \,. \tag{1}$$

Здесь параметр $0 < \alpha \leq 1$, а действительная функция $p(n)$ является или периодической, или представляет собой дискретный тригонометрический многочлен вида

$$p(n) = \sum_{j=1}^{m} p_j e^{i\lambda_j n},$$

где p_j — комплексные числа, а λ_j — действительные числа. Кроме того, мы будем считать, что функция $p(n)$ имеет нулевое среднее значение, т.е.

$$\mathrm{M}\big(p(n)\big) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} p(j) = 0.$$

Исследуем вопрос о поведении решений уравнения (1) при $n \to \infty$.

Уравнение (1) запишем как систему

$$\begin{aligned} x(n+1) - x(n) &= y(n) \\ y(n+1) - y(n) &= -n^{-\alpha}x(n). \end{aligned}$$

Пусть $Y_0(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ y(n) \end{pmatrix}$ и $\Delta Y_0(n) = Y_0(n+1) - Y_0(n)$. Тогда

$$\Delta Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -n^{-\alpha}p(n) & 0 \end{pmatrix} Y_0.$$

Выполним преобразование

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi(n) & 1 \end{pmatrix} Y_1,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты РНП.2.2.2.3.16065 и РНП.2.1.1.630), а также Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).

где
$$\phi(n)=\sum_{k=n}^{\infty} k^{-\alpha}p(k). \tag{2}$$
Тогда получим систему
$$\Delta Y_1=\begin{pmatrix} \phi(n) & 1 \\ -\phi(n)\phi(n+1) & -\phi(n+1) \end{pmatrix} Y_1. \tag{3}$$
Периодическую или почти периодическую функцию $p_1(n)$ с нулевым средним значением определим из уравнения
$$p_1(n+1)-p_1(n)=p(n).$$
Применив дважды дискретный аналог интегрирования по частям (преобразование Абеля) к сумме (2), получим
$$\phi(n)=-p_1(n)(n-1)^{-\alpha}+O\big(n^{-1-\alpha}\big).$$
Тогда
$$\phi(n)\phi(n+1)=p_1(n)p_1(n+1)(n-1)^{-\alpha}n^{-\alpha}+O\big(n^{-2\alpha-1}\big).$$
Теперь сделаем замену переменных в системе (3)
$$Y_1(n)=\begin{pmatrix} n^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & n^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} Y(n).$$
Приходим к системе
$$\begin{pmatrix} (n+1)^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & (n+1)^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \Delta Y(n)+\begin{pmatrix} \Delta(n^{\frac{\alpha}{2}}) & 0 \\ 0 & \Delta(n^{-\frac{\alpha}{2}}) \end{pmatrix} Y(n)=$$
$$=\begin{pmatrix} \phi(n) & 1 \\ -\phi(n)\phi(n+1) & -\phi(n+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & n^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} Y(n)$$
или
$$\Delta Y(n)=\begin{pmatrix} (n+1)^{-\frac{\alpha}{2}}n^{\frac{\alpha}{2}}\phi(n) & (n+1)^{-\frac{\alpha}{2}}n^{-\frac{\alpha}{2}} \\ -(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}n^{\frac{\alpha}{2}}\phi(n)\phi(n+1) & -(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}n^{-\frac{\alpha}{2}}\phi(n+1) \end{pmatrix} Y(n)-$$
$$-\begin{pmatrix} 1-(n+1)^{-\frac{\alpha}{2}}n^{\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & 1-(n+1)^{\frac{\alpha}{2}}n^{-\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} Y(n).$$
Подставляя в последнюю систему выражения для $\phi(n)$ и $\phi(n)\phi(n+1)$ и выполняя некоторые элементарные преобразования, окончательно получим систему
$$Y(n+1)=\Big[I+n^{-\alpha}A_1(n)+n^{-1}B+R(n)\Big]Y(n), \tag{4}$$
где
$$A_1(n)=\begin{pmatrix} -p_1(n) & 1 \\ -p_1(n)p_1(n+1) & p_1(n+1) \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$
и $R(n)=O\big(n^{-1-\alpha}\big)$.

Система (4) относится к классу систем линейных разностных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Для упрощения построения асимптотики решений подобного рода систем могут быть использованы дискретные аналоги усредняющих замен переменных. Применительно к дифференциальным уравнениям эта методика подробно описана в работах [1, 4]. Введем некоторые обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. Обозначим символом $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, а символом $\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел. Далее, пусть $f(t)\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$, тогда мы пишем, что $f(t)\in\ell_1$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k)|<\infty.$$

Если же $R(t)$ — матрица произвольных размеров и $t\in\mathbb{N}$, то запись $R(t)\in\ell_1$ означает, что $f(t)=\|R(t)\|\in\ell_1$, где $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма.

Пусть рассматривается следующая линейная система разностных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами:

$$x(t+1)=\Big(A_0+\sum_{i=1}^{n}A_i(t)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}A_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+R(t)\Big)x(t). \quad (5)$$

Здесь A_0, $A_{i_1\ldots i_l}(t)$, $R(t)$ — квадратные матрицы, $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные функции, $x(t)\in\mathbb{C}^m$ и $t\in\mathbb{N}$.

Пусть

1. A_0 — постоянная невырожденная матрица с вещественными собственными значениями. Кроме того, мы предположим, что спектры матриц A_0 и $(-A_0)$ не пересекаются.
2. $v_1(t)\to0, v_2(t)\to0,\ldots,v_n(t)\to0$ при $t\to\infty$.
3. $\Delta v_1(t),\Delta v_2(t),\ldots,\Delta v_n(t)\in\ell_1$.
4. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t)\in\ell_1$ для любого набора индексов $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_{k+1}\le n$.
5. Матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ принадлежат классу Σ.
6. Матрица $R(t)\in\ell_1$.

Мы говорим, что матрица $A(t)$ принадлежит классу Σ, если ее элементами являются тригонометрические многочлены. В том случае, когда $A(t)\in\Sigma$ и $\mathrm{M}[A(t)]=0$, мы будем писать $A(t)\in\Sigma_0$.

При выполнении указанных выше условий 1. — 6. справедлива следующая теорема (см. [5]).

Теорема 1. *Система* (5) *при достаточно больших t заменой*

$$x(t)=\Big[I+\sum_{i=1}^{n}Y_i(t)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}Y_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y(t), \quad (6)$$

где I — единичная матрица, а матрицы $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ принадлежат классу Σ_0, приводится к виду

$$y(t+1)=\Big(A_0+\sum_{i=1}^{n}A_iv_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+R_1(t)\Big)y(t),\quad t\in\mathbb{N}, \quad (7)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и матрицей $R_1(t)\in\ell_1$.

Матрицы $A_{i_1\dots i_l}$ определяются из условий разрешимости некоторых матричных разностных уравнений в класса Σ_0, а матрицы $Y_{i_1\dots i_l}(t)$ определяются как решения соответствующих уравнений. Явные формулы для определения матриц $A_{i_1\dots i_l}$ могут быть найдены в статье [4]. Остановимся подробнее на ситуации, когда в системе (5) присутствует только одна функция $v_1(t)$ (т.е. $n=1$). Определим следующую символьную функцию:

$$1(l) = \underbrace{1\dots 1}_{l \text{ раз}}, \quad l = 1,2,\dots,k$$

и $1(0)=0$. Например, $1(2)=11$, $1(4)=1111$ и т.д. Усредненная система (7) в этом случае может быть записана в виде

$$y(t+1) = \Big(A_0 + \sum_{j=1}^{k} A_{1(j)}\big[v_1(t)\big]^j + R_1(t)\Big)y(t), \quad t \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Для определения матриц $A_{1(j)}$ получаем следующую формулу:

$$A_{1(j)} = \mathrm{M}\Big[\sum_{l=0}^{j-1} A_{1(j-l)}(t)Y_{1(l)}(t)\Big], \quad j=1,\dots,k.$$

Матрицы $Y_{1(j)}(t)$ из класса Σ_0 являются решениями следующих разностных уравнений:

$$Y_{1(j)}(t+1)A_0 - A_0Y_{1(j)}(t) = \sum_{l=0}^{j-1} A_{1(j-l)}(t)Y_{1(l)}(t) - \sum_{l=0}^{j-1} Y_{1(l)}(t+1)A_{1(j-l)}, \quad j=1,\dots,k, \tag{9}$$

и $Y_0(t)=I$.

Отметим, что если в исходной системе (5) $A_0 = I$, то к рассмотрению допускаются также периодические матрицы $A_{i_1\dots i_l}(t)$ с одним и тем же периодом $T\in\mathbb{N}$. В этом случае матрицы $Y_{i_1\dots i_l}(t)$ являются T-периодическими с нулевым средним значением. Для случая $n=1$ в справедливости соответствующего утверждения легко убедиться, анализируя уравнение (9).

Усредненная система (7) в главной части не содержит, вообще говоря, осциллирующих коэффициентов, и в этом смысле она проще исходной системы (5). В частности, для построения асимптотики ее решений можно воспользоваться разностным аналогом фундаментальной теоремы Левинсона [6]. Соответствующее утверждение мы сформулируем применительно к системе (8).

Теорема 2. *Пусть в системе (8) $A_0 = I$. Предположим, что первой отличной от нулевой среди матриц $A_{1(j)}$ $(j=1,\dots,k)$ является матрица A_m. Пусть ее собственные числа различны. Тогда фундаментальная матрица $\Phi(t)$ системы (8) имеет следующую асимптотику при $t\to+\infty$:*

$$\Phi(t) = \Big[P + o(1)\Big]\prod_{l=t_1}^{t-1}\Lambda(l), \quad t>t_1, \quad t\in\mathbb{N},$$

где столбцами матрицы P являются собственные векторы матрицы A_m, а $\Lambda(t)$ — диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы

$$I + \sum_{j=m}^{k} A_{1(j)}\big[v_1(t)\big]^j.$$

Построение асимптотики системы (4) начнем со случая $\alpha = 1$. Итак,

I. $\underline{\alpha = 1}$.

Заменой $Y(n) = \big[I + n^{-1}V(n)\big]Z(n)$ мы перейдем от системы (4) к системе

$$Z(n+1) = \Big[I + n^{-1}(A_1 + B) + R_1(n)\Big]Z(n), \tag{10}$$

где

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(n)\big] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix},$$

$c = \mathrm{M}\big[p_1(n)p_1(n+1)\big]$ и $R_1(n) = O\big(n^{-2}\big)$. Собственные числа матрицы $A_1 + B$ различны при $c \neq 1/4$. Вычисляя собственные числа матрицы $I + n^{-1}(A_1 + B)$, убеждаемся в необходимости рассмотреть следующие случаи:

- $1 - 4c > 0$.

Тогда собственные числа имеют вид

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 \pm \frac{1}{n}\kappa, \quad \text{где} \quad \kappa = \sqrt{\frac{1}{4} - c}.$$

Несложно убедиться в том, что матрица P из теоремы 2 имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + \kappa & \frac{1}{2} - \kappa \end{pmatrix}.$$

Вспоминая все замены, выписываем асимптотику для решений уравнения (1) при $n \to \infty$:

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{1}{2}}\big(1 + o(1)\big)\prod_{l=n_1}^{n-1}\Big(1 \pm \frac{\kappa}{l}\Big).$$

Получим более информативное асимптотическое представление для $x_{1,2}(n)$. Условимся обозначать все постоянные (вообще говоря, различные) в возникающих ниже формулах одним и тем же символом C_1. Пусть

$$f(n) = \prod_{l=n_1}^{n-1}\Big(1 \pm \frac{\kappa}{l}\Big),$$

тогда, без ограничения общности полагая, что $f(n) > 0$, $n > n_1$, имеем

$$\ln f(n) = \sum_{l=n_1}^{n-1}\ln\Big(1 \pm \frac{\kappa}{l}\Big).$$

Поскольку,

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3), \quad x \to 0,$$

то

$$\ln f(n) = \sum_{l=n_1}^{n-1}\Big(\pm\frac{\kappa}{l} + O(l^{-2})\Big) = \pm\sum_{l=n_1}^{n-1}\frac{\kappa}{l} + C_1 + o(1), \quad n \to \infty.$$

Оценим сумму, входящую в это выражение, с помощью формулы Эйлера (см. [2, 3]). Применительно к рассматриваемым нами функциям она будет иметь вид

$$\sum_{l=n_1}^{n-1} l^{-\alpha} = \int_{n_1}^{n} t^{-\alpha}dt + C_1 + O\big(n^{-\alpha}\big), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad n \to \infty.$$

Откуда,

$$\ln f(n) = \pm\kappa \ln n + C_1 + o(1), \quad n \to \infty.$$

Поэтому функция $f(n)$ имеет следующую асимптотику при $n \to \infty$:

$$f(n) = C_1 n^{\pm\kappa}(1 + o(1)).$$

Соответственно линейно независимые решения $x_{1,2}(n)$ уравнения (1) обладают следующей асимптотикой:

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{1}{2}\pm\kappa}\big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty.$$

- $1 - 4c < 0$.

В этом случае собственные числа имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \frac{\mathrm{i}\kappa^*}{n}, \quad \text{где} \quad \kappa^* = \sqrt{c - \frac{1}{4}}.$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получаем следующую асимптотику для решений уравнения (1):

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{1}{2}} \exp\{\pm \mathrm{i}\kappa^* \ln n\}\big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty.$$

II. $1/2 < \alpha < 1$.

Сделаем в (4) усредняющую замену переменных

$$Y(n) = \big[I + n^{-\alpha} V_1(n)\big] Z(n).$$

Перейдем к системе

$$Z(n+1) = \Big[I + n^{-\alpha} A_1 + n^{-1} B + R_1(n)\Big] Z(n),$$

где $R_1(n) = O\big(n^{-2\alpha}\big)$. Собственные числа матрицы A_1 различны при условии, что $c \neq 0$. Поэтому, начиная с этого момента и везде далее, рассматривается именно этот случай. Пусть сначала

- $c > 0$.

Собственные числа матрицы $I + n^{-\alpha} A_1 + n^{-1} B$ комплексны и имеют вид

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{c}}{n^\alpha}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4cn^{2-2\alpha}}}.$$

Матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{c} & -\mathrm{i}\sqrt{c} \end{pmatrix}$$

приводит матрицу A_1 к диагональному виду. Используя теорему 2, получаем следующее асимптотическое представление решений исходного уравнения:

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}}\big(1 + o(1)\big) \prod_{l=n_1}^{n-1} \Big[1 \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{c}}{l^\alpha}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4cl^{2-2\alpha}}}\Big], \quad n \to \infty.$$

Применяя ту же технику, что и в предыдущем случае, и замечая, что

$$\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{c}}{l^\alpha}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4cl^{2-2\alpha}}} = \pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{c}}{l^\alpha} + O\big(l^{\alpha-2}\big), \quad l \to \infty,$$

мы можем переписать полученные асимптотические формулы в следующем виде:

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\Big\{\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha}\Big\}\big(1+o(1)\big), \quad n\to\infty.$$

- $c < 0$.
  Теперь

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 \pm \frac{\sqrt{-c}}{n^\alpha}\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4cn^{2-2\alpha}}}$$

и

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-c} & -\sqrt{-c} \end{pmatrix}.$$

Без труда устанавливается, что

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\Big\{\pm \frac{\sqrt{-c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha}\Big\}\big(1+o(1)\big), \quad n\to\infty.$$

III. $1/3 < \alpha \le 1/2$.
В этом случае в системе (4) нам необходимо сделать замену

$$Y(n) = \big[I + n^{-\alpha}V_1(n) + n^{-2\alpha}V_2(n)\big]Z(n).$$

Приходим к системе

$$Z(n+1) = \Big[I + n^{-\alpha}A_1 + n^{-2\alpha}A_2 + n^{-1}B + R_1(n)\Big]Z(n),$$

где $R_1(n) = O\big(n^{-3\alpha}\big)$. Матрица A_2 определяется как среднее значение матрицы $A_1(n)V_1(n)$. Матрица $V_1(n)$ находится из разностного уравнения

$$V_1(n+1) - V_1(n) = A_1(n) - A_1.$$

Производя несложные выкладки, получаем

$$A_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \varphi & \beta \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \beta = \mathrm{M}\Big[p_1(n+1)\sum_{l=1}^{n} p_1(l)\Big] \quad \text{и}$$

$$\varphi = \mathrm{M}\Big[\big(p_1(n+1)p_1(n+2)-c\big)\sum_{l=1}^{n} p_1(l) - p_1(n+2)\sum_{l=1}^{n}\big(p_1(l)p_1(l+1)-c\big)\Big].$$

При вычислении матрицы A_2 мы, в частности, воспользовались тривиальным соображением о том, что периодические или почти периодические функции $g(n)$ и $g(n{+}1)$ имеют одинаковое среднее значение. Как и в предыдущем случае, следует рассмотреть две ситуации:

- $c > 0$.
  Собственные числа матрицы $I + n^{-\alpha}A_1 + n^{-2\alpha}A_2 + n^{-1}B$ имеют вид

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 + \beta n^{-2\alpha} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{c}}{n^\alpha}\sqrt{1-\frac{\varphi}{cn^\alpha}-\frac{\alpha^2}{4cn^{2\alpha-2}}}.$$

Матрица P такая же, как и в предыдущем случае ($c > 0$). Пользуясь описанной выше техникой, строим асимптотическое представление для

$$\prod_{l=n_1}^{n-1}\Big[1+\beta l^{-2\alpha} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{c}}{l^\alpha}\sqrt{1-\frac{\varphi}{cl^\alpha}-\frac{\alpha^2}{4cl^{2\alpha-2}}}\Big], \qquad n\to\infty.$$

Приходим к выводу, что решения уравнения (1) имеют следующую асимптотику при $n \to \infty$:

$$x_{1,2}(n) = n^{1/4+\beta+c/2} \exp\Big\{\pm \mathrm{i}\Big(2\sqrt{c}\, n^{1/2} - \frac{\varphi\sqrt{c}}{2c}\ln n\Big)\Big\}\big(1+o(1)\big), \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Если же $\alpha < 1/2$, то

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\Big\{\frac{\beta + c/2}{1-2\alpha} n^{1-2\alpha}\Big\} \exp\Big\{\pm \mathrm{i}\Big(\frac{\sqrt{c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{\varphi\sqrt{c}}{2c(1-2\alpha)} n^{1-2\alpha}\Big)\Big\}\big(1+o(1)\big).$$

Заметим, что в последнем случае все решения уравнения (1) стремятся к нулю, когда $\beta + c/2 < 0$. Соответствующий пример мы приводим ниже.

- $c < 0$.

В этом случае

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 + \beta n^{-2\alpha} \pm \frac{\sqrt{-c}}{n^\alpha}\sqrt{1 - \frac{\varphi}{cn^\alpha} - \frac{\alpha^2}{4cn^{2\alpha-2}}}.$$

Естественно, матрица P по сравнению со случаем $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ ($c < 0$) не изменяется. Мы позволим себе сразу же написать асимптотику для решений $x_{1,2}(n)$ уравнения (1) при $n \to \infty$:

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\Big\{\pm\Big(\frac{\sqrt{-c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{\varphi\sqrt{-c}}{2c}\ln n\Big) + (\beta + c/2)\ln n\Big\}\big(1+o(1)\big),$$

когда $\alpha = 1/2$, и

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\Big\{\pm\Big(\frac{\sqrt{-c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{\varphi\sqrt{-c}}{2c(1-2\alpha)} n^{1-2\alpha}\Big) + \\ + \frac{\beta + c/2}{1-2\alpha} n^{1-2\alpha}\Big\}\big(1+o(1)\big), \quad \text{если} \quad \alpha < \frac{1}{2}.$$

Теперь мы можем перейти к построению асимптотики в общем случае.

IV. $1/(M+1) < \alpha \le 1/M$, $\quad M > 2, \quad M$ — целое.

В уравнении (4) теперь делается замена

$$Y(n) = \big[I + n^{-\alpha}V_1(n) + n^{-2\alpha}V_2(n) + \ldots + n^{-k\alpha}V_k(n)\big]Z(n),$$

и усредненная система имеет вид

$$Z(n+1) = \Big[I + n^{-\alpha}A_1 + n^{-2\alpha}A_2 + \ldots + n^{-k\alpha}A_k + n^{-1}B + R_1(n)\Big]Z(n),$$

где $R_1(n) = O\big(n^{-(k+1)\alpha}\big)$. Мы не можем написать явного выражения для собственных чисел $\lambda_{1,2}(n)$ матрицы

$$I + n^{-\alpha}A_1 + n^{-2\alpha}A_2 + \ldots + n^{-k\alpha}A_k + n^{-1}B, \tag{11}$$

не определяя всех матриц A_l вплоть до A_k. На самом деле, в большинстве случаев знание явного вида матриц A_1 и A_2 оказывается достаточным для определения характера поведения решений уравнения (1).

- $c > 0$.

Собственные числа матрицы (11) $\lambda_{1,2}(n)$ имеют следующую асимптотику при $n \to \infty$:

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 + \beta n^{-2\alpha} + O\big(n^{-3\alpha}\big) \pm \mathrm{i}\big(\sqrt{c} n^{-\alpha} + O\big(n^{-2\alpha}\big)\big).$$

Решений уравнения (1) при $n \to \infty$ имеют в этом случае следующую асимптотику:

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\Big\{\frac{\beta + c/2}{1-2\alpha} n^{1-2\alpha} + O\big(n^{1-3\alpha}\big)\Big\} \times$$
$$\times \exp\Big\{\pm \mathrm{i}\Big(\frac{\sqrt{c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} + O\big(n^{1-2\alpha}\big)\Big)\Big\}\big(1 + o(1)\big).$$

Заметим, что при $\alpha = 1/3$, вместо $O\big(n^{1-3\alpha}\big)$ следует писать $O\big(\ln n\big)$. Если $\beta + c/2 = 0$, то нам необходимо вычислить матрицу A_3, чтобы определить, как ведут себя решения уравнения (1) при $n \to \infty$.

- $c < 0$.

Собственные числа $\lambda_{1,2}(n)$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$\lambda_{1,2}(n) = 1 \pm \sqrt{-c} n^{-\alpha} + O\big(n^{-2\alpha}\big), \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$x_{1,2}(n) = n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\Big\{\pm \frac{\sqrt{-c}}{1-\alpha} n^{1-\alpha} + O\big(n^{1-2\alpha}\big)\Big\}\big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty.$$

В этом случае уравнение (1) имеет неограниченно растущие решения.

Пример. Рассмотрим дискретную периодическую функцию p с периодом $T = 5$ и нулевым средним значением. Пусть она принимает следующие значения на периоде:

$$p = \{2, 3, -3, -1, -1\}.$$

Вычислим величины c и β. Получаем

$$c = \frac{2}{5}, \quad \beta = -\frac{7}{5}, \quad \beta + \frac{c}{2} = -\frac{6}{5} < 0.$$

Таким образом, если $\alpha = 1$, то все решения уравнения (1) колебательно возрастают, причем амплитуда колебаний растет как $\sqrt{n}$. Если же $1/2 < \alpha < 1$, то решения по-прежнему колебательно растут. В этом случае амплитуда колебаний растет как $n^{\frac{\alpha}{2}}$. При значении параметра $\alpha = 1/2$ решения начинают колебательно убывать. Скорость убывания амплитуды $n^{-0.95}$. Если $1/3 < \alpha < 1/2$, то амплитуда решений убывает со скоростью $n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\big\{-\frac{6}{5}\frac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\big\}$. Наконец, если $\alpha \le 1/3$, то скорость убывания амплитуды равна $n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\big\{-\frac{6}{5}\frac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} + O\big(\ln n\big)\big\}$ в ситуации, когда $\alpha = \frac{1}{3}$, и $n^{\frac{\alpha}{2}} \exp\big\{-\frac{6}{5}\frac{n^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} + O\big(n^{1-3\alpha}\big)\big\}$ при $\alpha < \frac{1}{3}$.

В приведенном выше примере при значении $\alpha = 1/2$ происходит «скачкообразный» переход от колебательно растущих решений к колебательно убывающим. Легко понять, что этот пример можно подправить так, что при значении $\alpha = 1/2$ все решения будут ограничены, и при этом амплитуда колебаний не будет стремиться к нулю. Для этого вместо исходной периодической функции $p(n)$ надо рассмотреть функцию $\hat{p}(n) = \kappa p(n)$, где $\kappa = \sqrt{5/24}$.

Использованная техника применима и для исследования уравнения

$$x(n+2) - \Big(2 + \frac{1}{n^\alpha} p(n)\Big) x(n+1) + x(n) = 0,$$

которое после замены

$$x(n) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \prod_{l=l_0}^{n-2} \Big(2 + \frac{1}{l^\alpha} p(l)\Big) y(n)$$

приобретает следующий вид:

$$y(n+2) - 2y(n+1) + \frac{4}{(2 + \frac{1}{(n-1)^\alpha} p(n-1))(2 + \frac{1}{n^\alpha} p(n))} y(n) = 0.$$

Список литературы

[1] *В.Ш. Бурд, В.А. Каракулин* Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Матем. заметки. - 1998. - Т. 64, №5. - С. 658 – 666.

[2] *А.О. Гельфонд* Исчисление конечных разностей. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1959.

[3] *Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник* Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир, 1998.

[4] *П.Н. Нестеров* Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. - 2007. - Т. 43, №6. - С. 731 – 742.

[5] *П.Н. Нестеров* Асимптотическое представление решений систем линейных разностных уравнений и метод усреднения // Моделирование и анализ информационных систем. - 2007. - Т. 14, №2. - С. 63 – 67.

[6] *Z. Benzaid, D.A. Lutz* Asymptotic representation of solutions of perturbed systems of linear difference equations // Studies in Appl. Math. 1987. V. 77. P. 195 – 221.