Параметрический резонанс в уравнениях адиабатических осцилляторов

Бурд В.Ш., Нестеров П.Н.[1]
Ярославский государственный университет,
150 000, Ярославль, Советская, 14

Аннотация

В работе с помощью метода усреднения и асимптотической теоремы Н. Левинсона исследуется явление параметрического резонанса в некоторых уравнениях из класса адиабатических осцилляторов.

Постановка задачи

Возникновение неограниченно возрастающих колебаний динамической системы при сколь угодно малом периодическом (почти периодическом) возмущении некоторых ее параметров называют *параметрическим резонансом*. Теория линейного параметрического резонанса довольно хорошо изучена (Матье, Хилл, Хаупт (Haupt), Л.И. Мандельштам, Н.Д. Папалекси, А.А. Андронов, А.А. Витт и др.). Для возмущенных гамильтоновых систем теория параметрического резонанса описана, например, в монографии [12]. Известно, что параметрический резонанс наблюдается уже в системах с одной степенью свободы. Отметим, например, уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\big[1 + \varepsilon f(t)\big]x = 0, \tag{1}$$

где ω — вещественный параметр, ε — малый положительный параметр, $f(t)$ — почти периодическая или периодическая функция. Если $f(t) = A\cos\lambda t$, мы получаем известное уравнение Матье. Оказывается, что в этом случае для любого сколь угодно малого ε можно указать множество интервалов частот λ, при которых нулевое решение этого уравнения неустойчиво. Эта особенность — состоящая в том, что спектр частот, при которых возникают неограниченно возрастающие колебания, не является точечным, а состоит из совокупности малых интервалов, длины которых зависят от амплитуды возмущений (т.е. от ε) — представляет собой характерную черту параметрического резонанса. Другая особенность параметрического резонанса состоит в том, что колебания нарастают по экспоненциальному закону.

Объектом исследования в этой статье являются уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \big(1 + q(t)\big)x = 0, \tag{2}$$

где функция $q(t)$ мала в некотором смысле при $t \to \infty$. Уравнения такого типа называют обычно *адиабатическими осцилляторами*. Пример уравнения (2) доставляет адиабатический осциллятор

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Big(1 + \frac{1}{t^\rho}\sin\lambda t\Big)x = 0, \tag{3}$$

где λ, ρ — вещественные числа и $1/2 \le \rho \le 1$. Известно (см. [3, 5, 6, 10, 11]), что при определенных значениях параметра λ (критические частоты) уравнение (3) может иметь неограниченные решения.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты РНП.2.2.2.3.16065 и РНП.2.1.1.630), а также Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).

Уравнение (2), хоть и имеет внешнее сходство с (1), относится все же к уравнениям совсем другого класса (его коэффициенты, в частности, не являются периодическими или почти периодическими функциями). Это обстоятельство оказывает влияние на особенности проявления параметрического резонанса как в уравнении вида (2), так и в других системах с колебательно убывающих коэффициентами. В частности, рост амплитуды колебаний в подобных системах может происходить с различной скоростью (логарифмической, степенной, экспоненциальной). Для уравнения (3) в отличии от (1) параметрический резонанс имеет точечный тип: для любого $0 < \rho \leq 1$ можно указать лишь конечный набор значений λ, при которых возможно появление неограниченных решений. Долгое время вопрос о возможности реализации в уравнениях подобного рода параметрического резонанса неточечного типа оставался открытым. В работе [9] было изучено уравнение типа (2) с функцией $q(t)$ вида

$$q(t) = a\frac{\sin\varphi(t)}{\sqrt{t}}, \qquad \varphi(t) = t + \alpha\ln t, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Адиабатический осциллятор такой формы впервые появился в работе [1] при исследовании четвертого уравнения Пенлеве. Как оказывается, для любого значения $a > 0$ можно указать целый интервал значений α, при которых в соответствующем уравнении (2) возникают неограниченные колебания. Зона параметрического резонанса (неустойчивости решений) для этого уравнения задается неравенствами:

$$-\frac{5a^2}{24} \leq \alpha \leq \frac{a^2}{24}, \quad a \neq 0. \tag{4}$$

В этой работе мы остановимся на исследовании задачи об устойчивости решений уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(1 + a\frac{\sin\varphi(t)}{t^\rho}\right)x = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0, \quad a \in \mathbb{R}/\{0\}, \tag{5}$$

с функцией $\varphi(t)$ вида

$$\varphi(t) = t + \alpha\ln t, \qquad a, \alpha \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{6}$$

и

$$\varphi(t) = t + \alpha t^\beta, \qquad \alpha \neq 0, \quad 0 < \beta < 1. \tag{7}$$

Мы покажем, что зона параметрического резонанса в этих уравнениях возникает на границе областей устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров уравнения (5).

Метод исследования уравнения (5) опирается на два основных результата: идею усредняющих замен в системах с колебательно убывающими коэффициентами и фундаментальную теорему Н. Левинсона. В следующем разделе мы подробно опишем эту методику.

Асимптотическое интегрирование систем с колебательно убывающими коэффициентами

Впервые возможность использования метода усреднения для упрощения построения асимптотики решений некоторого класса линейных системы на примере уравнения (3) была продемонстрирована в работе [3]. Вообще, метод усреднения является довольно часто используемым асимптотическим приемом, а усредняющие замены оказываются полезными при решении различных задач [2]. Общий вид усредняющих замен, рассмотренных в [3], был затем получен в [9].

Рассмотрим следующую систему с колебательно убывающими коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big)x. \quad (8)$$

Здесь x — m-мерный комплекснозначный вектор; A_0, $A_{i_1\ldots i_l}(t)$, $R(t)$ — квадратные матрицы размера $m\times m$; $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные функции. Пусть

1. A_0 — постоянная матрица с вещественными собственными значениями.
2. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\ldots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$.
3. $\dot v_1(t),\dot v_2(t),\ldots,\dot v_n(t)\in L_1[t_0,\infty)$.
4. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t)\in L_1[t_0,\infty)$ для любого набора $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_{k+1}\le n$.
5. Элементами матриц $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены.
6. Матрица $R(t)\in L_1[t_0,\infty)$. (Запись $R(t)\in L_1[t_0,\infty)$ означает, что $\|R(t)\|\in L_1[t_0,\infty)$, где $\|\cdot\|$ — некоторая матричная норма.)

При сформулированных выше условиях справедлива следующая теорема (см. [9]):

Теорема 1. *Система* (8) *при достаточно больших t заменой*

$$x = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} Y_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y, \quad (9)$$

где I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\frac{dy}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1 i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t)\Big)y, \quad (10)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и матрицей $R_1(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

Доказательство этой теоремы может быть найдено в работе [9]. Остановимся лишь на некоторых основных моментах, необходимых нам для дальнейшего изложения. Матрицы $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ определяются как решения матричных дифференциальных уравнений вида

$$\dot Y_{i_1 i_2\ldots i_l} + Y_{i_1 i_2\ldots i_l}A_0 - A_0 Y_{i_1 i_2\ldots i_l} = F^{(i_1\ldots i_l)}(t) - A_{i_1\ldots i_l}, \quad (11)$$

где элементами матрицы $F^{(i_1\ldots i_l)}(t)$ являются тригонометрические многочлены. Матрицы $A_{i_1\ldots i_l}$ выбирается из условия однозначной разрешимости уравнений (11) в классе матриц, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением. Именно,

$$A_{i_1\ldots i_l} = \mathrm{M}\big[F^{(i_1\ldots i_l)}(t)\big], \qquad \mathrm{M}\big[F(t)\big] := \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(s)ds.$$

В частности,
$$A_i = \mathrm{M}\big[A_i(t)\big], \qquad i = 1, \dots, n.$$
Далее,
$$A_{ij} = \mathrm{M}\big[A_{ij}(t) + A_i(t)Y_j(t) + A_j(t)Y_i(t)\big], \quad 1 \le i < j \le n$$
и
$$A_{ii} = \mathrm{M}\big[A_{ii}(t) + A_i(t)Y_i(t)\big], \quad i = 1, \dots, n.$$
Здесь матрицы $Y_i(t)$ $(i = 1, \dots, n)$ с нулевым средним значением определяются из уравнений
$$\frac{dY_i}{dt} + Y_i A_0 - A_0 Y_i = A_i(t) - A_i.$$

Замены вида (9) называют *усредняющими.* В дальнейшем нам потребуется следующее свойство усредняющих замен (см. [8]):

Теорема 2. *Пусть в системе* (8)
$$\mathrm{M}\Big[\operatorname{tr} A_{i_1\dots i_l}(t)\Big] = 0, \quad 1 \le i_1 \le \dots \le i_l \le n, \quad l \le k.$$
Тогда все матрицы $A_{i_1\dots i_l}$ *в* (10) *имеют нулевой след, т.е.*
$$\operatorname{tr} A_{i_1\dots i_l} = 0, \quad 1 \le i_1 \le \dots \le i_l \le n, \quad l \le k.$$

Система (10) не содержит в главной части осциллирующих коэффициентов, и в этом смысле она проще исходной системы (8). В частности, для построения асимптотики ее решений может быть использована фундаментальная теорема Н. Левинсона. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:
$$\frac{dx}{dt} = \big(\Lambda(t) + R(t)\big)x, \tag{12}$$
где $x(t)$ — комплекснозначный вектор размерности m, $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\big)$ — непрерывная диагональная матрица, а $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Системы типа (12) называют *L-диагональными.* Потребуем далее, чтобы для элементов матрицы $\Lambda(t)$ были выполнены следующие условия, известные как условия дихотомии: пусть для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо
$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \le K_1, \quad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{13}$$
либо
$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \ge K_2 \quad \text{для} \quad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{14}$$
где K_1, K_2 — некоторые постоянные.

Справедлива [4, 7]

Теорема 3 (Levinson). *Если выполнены условие* (13)–(14)*, то фундаментальная матрица* $X(t)$ *L-диагональной системы* (12) *допускает следующее асимптотическое представление при* $t \to \infty$:
$$X(t) = \Big(I + o(1)\Big)\exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}.$$

В задачах, которые рассматриваются в этой статье, оказываются выполненными следующие условия, достаточные для дихотомии (13)–(14): для каждой пары индексов (i,j) величина

$$\operatorname{Re}\bigl(\lambda_i(t)-\lambda_j(t)\bigr)\le 0 \quad (\ge 0), \quad t\ge t_0, \tag{15}$$

т.е. не изменяет своего знака при больших значениях t.

Таким образом, чтобы построить асимптотику решений системы (8), необходимо привести усредненную систему (10) к L-диагональному виду и построить асимптотику ее решений, воспользовавшись теоремой Левинсона. В некоторых случаях это делается особенно просто. Именно, имеет место

Теорема 4. *Если все собственные числа матрицы A_0 различны, и она имеет канонический вид $A_0=\Lambda_0$, то система (10) при достаточно больших t с помощью замены*

$$y=\Bigl[I+\sum_{i=1}^{n}C_i v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}C_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}C_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Bigr]z, \tag{16}$$

где $C_{i_1\ldots i_l}$ — постоянные матрицы, приводится к L-диагональному виду

$$\frac{dz}{dt}=\Bigl(\Lambda_0+\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}\Lambda_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}\Lambda_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+R_2(t)\Bigr)z. \tag{17}$$

Здесь $\Lambda_{i_1\ldots i_l}$ — постоянные диагональные матрицы, и $R_2(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 1. Для определения матриц $C_{i_1\ldots i_l}$ и $\Lambda_{i_1\ldots i_l}$ получаем матричные уравнения, которые имеют вид

$$C_{i_1i_2\ldots i_l}\Lambda_0-\Lambda_0C_{i_1i_2\ldots i_l}=\Psi^{(i_1i_2\ldots i_l)}-\Lambda_{i_1i_2\ldots i_l},$$

где $\Psi^{(i_1i_2\ldots i_l)}$ — некоторая постоянная матрица. Матрицу $\Lambda_{i_1i_2\ldots i_l}$ определим следующим образом:

$$\Lambda_{i_1i_2\ldots i_l}=\operatorname{diag}\Psi^{(i_1i_2\ldots i_l)}.$$

Матрица $C_{i_1\ldots i_l}$ такова, что $\operatorname{diag}C_{i_1\ldots i_l}=0$, а недиагональные элементы c_{ij} определяются как

$$c_{ij}=\frac{\psi_{ij}}{\lambda_j-\lambda_i}.$$

Здесь ψ_{ij} — элемент матрицы $\Psi^{(i_1i_2\ldots i_l)}$ с номером (i,j), и $\Lambda_0=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$.

Легко видеть, что

$$\Lambda_i=\operatorname{diag}A_i, \qquad i=1,\ldots,n.$$

Далее,

$$\Lambda_{ij}=\operatorname{diag}\bigl(A_{ij}+A_iC_j+A_jC_i\bigr), \quad 1\le i<j\le n$$

и

$$\Lambda_{ii}=\operatorname{diag}\bigl(A_{ii}+A_iC_i\bigr), \quad i=1,\ldots,n.$$

Обозначим через $\Lambda(t)=\operatorname{diag}\bigl(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)\bigr)$ — главную часть системы (17), т.е.

$$\Lambda(t)=\Lambda_0+\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i v_i(t)+\ldots+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}\Lambda_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t).$$

Теоремы 3 и 4 могут быть объединены в следующем утверждении.

Теорема 5. *Пусть все собственные числа матрицы A_0 различны. Тогда, если выполнены условия дихотомии (13), (14), то фундаментальная матрица $Y(t)$ системы (10) имеет следующую асимптотику:*

$$Y(t) = \Big(C_0 + o(1)\Big) \exp\Big\{ \int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds \Big\}, \qquad t \to \infty,$$

где C_0 — постоянная матрица, по столбцам которой стоят собственные векторы матрицы A_0, отвечающие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ($\lambda_1 = \lim\limits_{t\to\infty} \lambda_1(t), \dots, \lambda_m = \lim\limits_{t\to\infty} \lambda_m(t)$).

Исследование устойчивости решений уравнения (5)

От уравнения (5) перейдем к системе стандартным образом:

$$\dot{y}_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + q(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] y_0, \qquad q(t) = a\frac{\sin\varphi(t)}{t^\rho},$$

где $y_0 = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$. Обозначив $\mathfrak{i} = \sqrt{-1}$, сделаем в этой системе замену $y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathfrak{i} & -\mathfrak{i} \end{pmatrix} y_1$. Приходим к системе

$$\dot{y}_1 = \left[\begin{pmatrix} \mathfrak{i} & 0 \\ 0 & -\mathfrak{i} \end{pmatrix} + \frac{\mathfrak{i}}{2} q(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right] y_1. \tag{18}$$

Предположим сначала, что функция $\varphi(t)$ имеет вид (6).

Перейдем к новому времени

$$\tau = t + \alpha \ln t. \tag{19}$$

Из геометрических соображений непосредственно следует, что это трансцендентное уравнение имеет единственный корень $t(\tau)$ такой, что $t(\infty) = \infty$. Построим его асимптотику. Из (19) следует, что

$$\frac{\tau}{t} = 1 + \frac{\alpha \ln t}{t} = 1 + \omega(t),$$

где $\omega(t) = o(1)$ при $t \to \infty$. Откуда

$$t(\tau) = \frac{\tau}{1 + \omega\big(t(\tau)\big)}.$$

Далее, поскольку $t(\tau) \to \infty$ при $\tau \to \infty$, то $\omega\big(t(\tau)\big) = o(1)$ при $\tau \to \infty$. Тогда

$$t(\tau) = \frac{\tau}{1 + o(1)} = \tau\big(1 + o(1)\big), \qquad \tau \to \infty.$$

Подставляя полученное асимптотическое представление в аргумент функции $\ln t$ в формуле (19), окончательно получаем

$$t(\tau) = \tau - \alpha \ln \tau + o(1), \qquad \tau \to \infty.$$

Несложно установить также, что

$$t'(\tau) = 1 - \frac{\alpha}{\tau} + O\left(\frac{\ln \tau}{\tau^2}\right), \qquad \tau \to \infty.$$

Это следует из того, что

$$t'(\tau) = \frac{1}{\tau'(t)} = \frac{1}{1+\alpha t^{-1}} = 1 - \alpha t^{-1} + O\bigl(t^{-2}\bigr), \quad \text{где} \quad t = t(\tau).$$

В новом времени τ система (18) перепишется следующим образом:

$$\bar{y}_1' = \left[\operatorname{diag}(\mathfrak{i}, -\mathfrak{i})\Bigl(1 - \frac{\alpha}{\tau}\Bigr) + \frac{\mathfrak{i}}{2}\frac{a\sin\tau}{\tau^\rho}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{\ln\tau}{\tau^{1+\rho}}\right)\right]\bar{y}_1. \tag{20}$$

Здесь мы учли, что

$$\frac{t'(\tau)}{\bigl(t(\tau)\bigr)^\rho} = \frac{1}{\tau^\rho} + O\left(\frac{\ln\tau}{\tau^{1+\rho}}\right).$$

В системе (20) сделаем замену $\bar{y}_1 = \operatorname{diag}\left(e^{\mathfrak{i}\tau}, e^{-\mathfrak{i}\tau}\right) y_2$, предварительно разложив $\sin\tau$ по формуле Эйлера. Приходим к системе

$$y_2' = \left[A_1(\tau)\tau^{-\rho} + A_2\tau^{-1} + O\left(\frac{\ln\tau}{\tau^{1+\rho}}\right)\right] y_2, \tag{21}$$

где

$$A_1(\tau) = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} e^{\mathfrak{i}\tau} - e^{-\mathfrak{i}\tau} & e^{-\mathfrak{i}\tau} - e^{-3\mathfrak{i}\tau} \\ e^{\mathfrak{i}\tau} - e^{3\mathfrak{i}\tau} & e^{-\mathfrak{i}\tau} - e^{\mathfrak{i}\tau} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = -\mathfrak{i}\alpha\operatorname{diag}(1, -1).$$

Система (21) имеет вид (8). Для ее исследования может быть использована изложенная в предыдущем разделе техника.

- Пусть сначала $\rho > 1/2$. В системе (21) сделаем усредняющую замену

$$y_2 = \Bigl[I + Y_1(\tau)\tau^{-\rho} + Y_2(\tau)\tau^{-1}\Bigr] y_3.$$

Получаем систему

$$y_3' = \left[A_2\tau^{-1} + O\left(\frac{\ln\tau}{\tau^{1+\rho}}\right) + O\left(\tau^{-2\rho}\right)\right] y_3, \tag{22}$$

которая имеет L-диагональную форму. Фундаментальная матрица этой системы, согласно теореме Левинсона, допускает следующее асимптотическое представление:

$$\bigl[I + o(1)\bigr]\operatorname{diag}\Bigl(\exp\{-\mathfrak{i}\alpha\ln\tau\}, \exp\{\mathfrak{i}\alpha\ln\tau\}\Bigr), \qquad \tau \to \infty.$$

Отсюда сразу же следует ограниченность решений системы (22), а следовательно, и исходного уравнения (5) любых a и α.

- Рассмотрим теперь случай, когда $\rho < 1/2$. Для определенности будем считать пока, что $\rho > 1/3$. В системе (21) сделаем усредняющую замену

$$y_2 = \Bigl[I + Y_1(\tau)\tau^{-\rho} + Y_{11}(\tau)\tau^{-2\rho} + Y_2(\tau)\tau^{-1}\Bigr] y_3.$$

Приходим к системе

$$y_3' = \Bigl[A_{11}\tau^{-2\rho} + A_2\tau^{-1} + O\left(\tau^{-3\rho}\right)\Bigr] y_3, \tag{23}$$

где

$$A_{11} = \mathrm{M}\bigl[A_1(\tau)Y_1(\tau)\bigr] = -\frac{a^2}{24}\mathfrak{i}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_{11} действительны и имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{5}a^2}{24}.$$

Согласно теореме 4 (этой теоремой мы можем воспользоваться, например, сделав в системе (23) замену времени $s = \int \tau^{-2\rho} d\tau$), система (23) с помощью преобразования типа (16) может быть приведена к L-диагональному виду

$$y_4' = \left[\frac{\sqrt{5}a^2}{24} \operatorname{diag}(1,-1)\tau^{-2\rho} - \frac{2\sqrt{5}\alpha}{5} \operatorname{diag}(1,-1)\tau^{-1} + R(\tau) \right] y_4, \tag{24}$$

где $R(\tau) \in L_1[\tau_0, \infty)$. Линейно независимые решения этой системы допускают следующее асимптотическое представление при $\tau \to \infty$:

$$y_4^{(1)}(\tau) = \big[e_1 + o(1)\big] \tau^{-2\sqrt{5}\alpha/5} \exp\Big\{ \frac{\sqrt{5}a^2}{24(1-2\rho)} \tau^{1-2\rho} \Big\},$$
$$y_4^{(2)}(\tau) = \big[e_2 + o(1)\big] \tau^{2\sqrt{5}\alpha/5} \exp\Big\{ \frac{-\sqrt{5}a^2}{24(1-2\rho)} \tau^{1-2\rho} \Big\},$$

где $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Таким образом, система (23) (а значит, и уравнение (5)) имеет неограничено растущие решения при $\tau \to \infty$ ($t \to \infty$) и любых $a \neq 0$ и α, по крайней мере, когда $1/3 < \rho < 1/2$. Если теперь $\rho \leq 1/3$, то, рассуждая аналогично, приходим к системе типа (24), в которой среди слагаемых, не принадлежащих $L_1[\tau_0, \infty)$, появится член порядка $O\big(\tau^{-3\rho}\big)$. Соответствующие линейно независимые решения полученной системы будут иметь следующее асимптотическое представление при $\tau \to \infty$:

$$y_4^{(1)}(\tau) = \big[e_1 + o(1)\big] \tau^{-2\sqrt{5}\alpha/5} \exp\Big\{ \frac{\sqrt{5}a^2}{24(1-2\rho)} \tau^{1-2\rho} + O\big(r(\tau)\big) \Big\},$$
$$y_4^{(2)}(\tau) = \big[e_2 + o(1)\big] \tau^{2\sqrt{5}\alpha/5} \exp\Big\{ \frac{-\sqrt{5}a^2}{24(1-2\rho)} \tau^{1-2\rho} + O\big(r(\tau)\big) \Big\},$$

где

$$r(\tau) = \begin{cases} \ln \tau, & \rho = 1/3, \\ \tau^{1-3\rho}, & \rho < 1/3. \end{cases}$$

Поэтому и в этом случае уравнение (5) будет иметь неограниченно растущие решения.

- Пусть $\rho = 1/2$. Выполняя в системе (21) усредняющую замену

$$y_2 = \Big[I + Y_1(\tau)\tau^{-1/2} + Y_{11}(\tau)\tau^{-1} \Big] y_3,$$

получаем систему

$$y_3' = \left[\Gamma \tau^{-1} + O\left(\frac{\ln \tau}{\tau^{3/2}} \right) \right] y_3, \tag{25}$$

где

$$\Gamma = A_{11} + A_2 = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} \frac{a^2}{12} + \alpha & -\frac{a^2}{8} \\ \frac{a^2}{8} & -\frac{a^2}{12} - \alpha \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Для определения собственных чисел матрицы Γ имеем характеристический многочлен

$$\lambda^2 + \frac{1}{4}\Big(\gamma^2 - \frac{a^4}{16} \Big) = 0, \quad \text{где} \quad \gamma = 2\alpha + \frac{a^2}{6}.$$

Очевидно, что собственные числа матрица Γ различны, если $|\gamma| \neq a^2/4$, и совпадают (равны нулю), если $|\gamma| = a^2/4$. В первом случае система (25) заменой $y_3 = C y_4$, где матрица C приводит матрицу Γ к диагональной форме, может быть преобразована к L-диагональному виду

$$y_4' = \left[L \tau^{-1} + O\left(\frac{\ln \tau}{\tau^{3/2}} \right) \right] y_4. \tag{27}$$

Собственные числа матрицы L равны

а) $\pm\mathrm{i}\mu$, где $\mu = \dfrac{1}{2}\sqrt{\gamma^2 - \dfrac{a^4}{16}}$, если $|\gamma| > a^2/4$.

Фундаментальную матрицу системы (27) образуют решения со следующей асимптотикой при $\tau \to \infty$:

$$y_4^{(1)}(\tau) = \big[e_1 + o(1)\big] \exp\big\{i\mu \ln \tau\big\},$$
$$y_4^{(2)}(\tau) = \big[e_2 + o(1)\big] \exp\big\{-i\mu \ln \tau\big\}.$$

Все решения системы (25) (а, следовательно, и уравнения (5)) оказываются в этом случае ограниченными.

б) $\pm\mu^*$, где $\mu^* = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^4}{16} - \gamma^2}$, если $|\gamma| < a^2/4$.

Для линейно независимых решений имеют место асимптотические формулы

$$y_4^{(1)}(\tau) = \big[e_1 + o(1)\big]\tau^{\mu^*},$$
$$y_4^{(2)}(\tau) = \big[e_2 + o(1)\big]\tau^{-\mu^*}.$$

Возвращаясь к исходному времени t, приходим к выводу, что уравнение (5) имеет осциллирующие решения, амплитуда колебаний которых при $t \to \infty$ растет как t^{μ^*}.

Чуть более сложно исследуется случай, когда $|\gamma| = a^2/4$. В этой ситуации система (25) при помощи подходящего преобразования вида $y_3 = Cy_4$ приводится к виду

$$y_4' = \left[J\tau^{-1} + O\left(\frac{\ln \tau}{\tau^{3/2}}\right)\right] y_4 \tag{28}$$

с матрицей

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В системе (28) удобно перейти к новому времени $s = \ln \tau$. В новом времени эта система примет следующий вид:

$$y_4' = \left[J + O\Big(s \exp\Big\{-\frac{s}{2}\Big\}\Big)\right] y_4, \tag{29}$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменной s. Выполним замену

$$y_4 = \begin{pmatrix} s & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_5. \tag{30}$$

Приходим к системе

$$y_5' = \left[\mathrm{diag}(-1, 0)s^{-1} + O\Big(s^2 \exp\Big\{-\frac{s}{2}\Big\}\Big)\right] y_5, \tag{31}$$

которая имеет L-диагональный вид. Согласно теореме Левинсона, система (31) имеет решение с асимптотикой

$$y_5(s) = \begin{pmatrix} o(1) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \qquad s \to \infty.$$

Система (29) имеет тогда решение с асимптотикой

$$y_4(s) = \begin{pmatrix} s(1 + o(1)) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}, \qquad s \to \infty.$$

Возвращаясь к исходному времени t, убеждаемся в том, что уравнение (5) обладает осциллирующими решениями, амплитуда колебаний которых растет как $\ln t$.

Таким образом, мы приходим к следующему результату. Плоскость $\rho = 1/2$ разделяет пространство параметров (a, α, ρ) уравнения (5) на два полупространства, в одном из которых решения уравнения (5) устойчивы, а в другом, соответственно, неустойчивы. На границе этих полупространств ($\rho = 1/2$), существует зона параметрического резонанса (4).

Рассмотрим снова уравнение вида (5), в котором на сей раз функция $\varphi(t)$ имеет вид (7). Далее мы покажем, что в пространстве параметров (a, α, β, ρ) можно указать границу области устойчивости и неустойчивости. Этой границей является гиперплоскость

$$\beta + 2\rho - 1 = 0.$$

На этой гиперплоскости можно выделить зону параметрического резонанса, которая определяется неравенствами:

$$-\frac{5a^2}{24\beta} < \alpha < \frac{a^2}{24\beta}, \quad \beta = 1 - 2\rho, \quad a, \alpha \neq 0. \tag{32}$$

От уравнения (5) вновь перейдем к системе (18). В этой системе сделаем замену времени $\tau = t + \alpha t^\beta$. Как и в предыдущем случае нам необходимо построить асимптотику корня $t(\tau)$ этого уравнения при $\tau \to \infty$, а также асимптотику для $t'(\tau)$. Поскольку это делается аналогично уже рассмотренному нами случаю, мы выпишем лишь окончательный результат. Имеем,

$$t(\tau) = \tau - \alpha\tau^\beta + o\big(\tau^\beta\big), \qquad t'(\tau) = 1 - \alpha\beta\tau^{\beta-1} + O\left(\tau^{2(\beta-1)}\right).$$

Откуда

$$\frac{t'(\tau)}{\big(t(\tau)\big)^\rho} = \tau^{-\rho} + O\left(\tau^{-\rho+\beta-1}\right).$$

В новом времени τ система (18) перепишется следующим образом:

$$\bar{y}_1' = \left[\operatorname{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i})\Big(1 - 1 + t'(\tau)\Big) + \frac{1}{2}\mathrm{i}a\sin\tau\frac{t'(\tau)}{\big(t(\tau)\big)^\rho}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]\bar{y}_1. \tag{33}$$

В системе (33) выполним замену $\bar{y}_1 = \operatorname{diag}\left(e^{\mathrm{i}\tau}, e^{-\mathrm{i}\tau}\right) y_2$. Приходим к системе

$$y_2' = \Big[A_1(\tau)v_1(\tau) + A_2 v_2(\tau)\Big]y_2, \tag{34}$$

где

$$A_1(\tau) = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\tau} - e^{-\mathrm{i}\tau} & e^{-\mathrm{i}\tau} - e^{-3\mathrm{i}\tau} \\ e^{\mathrm{i}\tau} - e^{3\mathrm{i}\tau} & e^{-\mathrm{i}\tau} - e^{\mathrm{i}\tau} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = -\mathrm{i}\alpha\beta\operatorname{diag}(1, -1),$$

и

$$v_1(\tau) = \frac{t'(\tau)}{\big(t(\tau)\big)^\rho} = \tau^{-\rho} + O\left(\tau^{-\rho+\beta-1}\right), \quad v_2(\tau) = \frac{1 - t'(\tau)}{\alpha\beta} = \tau^{\beta-1} + O\left(\tau^{2(\beta-1)}\right).$$

В системе (34) произведем усредняющую замену. В зависимости от того, с какой степенью интегрируемы функции $v_1(\tau)$ и $v_2(\tau)$, вычислим столько постоянных матриц, сколько необходимо. Можно показать, что матрицы $A_1, A_{12}, A_{111}, A_{122}, A_{222}$ оказываются нулевыми. Таким образом, с помощью подходящей усредняющей замены мы приводим систему (34) к виду

$$y_3' = \Big[A_{11}v_1^2(\tau) + A_2 v_2(\tau) + A_{112}v_1^2(\tau)v_2(\tau) + \ldots + A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(\tau)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(\tau) + R(\tau)\Big]y_3. \tag{35}$$

Здесь

$$A_{11} = -\frac{a^2}{24}\mathfrak{i}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

и $R(\tau) \in L_1[\tau_0, \infty)$. Заметим также, что

$$v_1^2(\tau) = \tau^{-2\rho} + O\left(\tau^{-2\rho+\beta-1}\right).$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется доказать одно вспомогательное утверждение. Будем говорить, что матрица A принадлежит классу Ξ, если она имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} \end{pmatrix},$$

где $\bar{a}$ означает величину, комплексно сопряженную к a. Легко проверить, что если $A, B \in \Xi$, то AB и $A+B$ также принадлежат классу Ξ.

Пусть выполнены все условия теоремы 1, и исходная система (8) с колебательно убывающими коэффициентами посредством усредняющей замены (9) приводится к виду (10).

Утверждение 1. *Если в системе* (8) *матрицы* $A_0, A_i(t), \ldots, A_{i_1\ldots i_k}(t)$ *принадлежат классу* Ξ, *то все матрицы* $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ *в* (9) *и все постоянные матрицы* $A_{i_1\ldots i_l}$ *в* (10) *также принадлежат* Ξ.

Доказательство. Основу доказательства теоремы 1 составляет утверждение о существовании у матричного дифференциального уравнения

$$\dot{Y} + YA_0 - A_0Y = F(t), \tag{36}$$

единственного решения $Y(t)$ из класса Σ_0 (матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением) при любой матрице $F(t) \in \Sigma_0$. Как мы уже отмечали выше, матрицы $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ в формуле (9) определяются именно из уравнений вида (36) (см. формулу (11)). Поэтому для доказательства сформулированного утверждения нам достаточно показать, что матрицы $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ будут принадлежать Ξ, когда A_0 и $F(t)$ принадлежат этому классу. Справедливость утверждения для матриц $A_{i_1\ldots i_l}$ будет следовать из того факта, что эти матрицы определяются как средние значения суммы произведений матриц вида $A_{i_1\ldots i_p}(t)Y_{i_1\ldots i_s}(t)$. Выше мы отметили, что операции умножения и сложения двух матриц из класса Ξ не выводят за пределы этого класса. Вычисление же среднего значения не изменяет интересующую нас структуру матрицы. Итак, пусть в (36) матрица $F(t) \in \Sigma_0 \bigcap \Xi$, и $A_0 \in \Xi$. Как уже было отмечено, в этом случае существует и единственно решение

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

уравнения (36) из класса Σ_0. Для доказательства утверждения нам достаточно убедиться в том, что матрица

$$\tilde{Y}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{11} & \tilde{y}_{12} \\ \tilde{y}_{21} & \tilde{y}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_{22} & \bar{y}_{21} \\ \bar{y}_{12} & \bar{y}_{11} \end{pmatrix}$$

из класса Σ_0 также удовлетворяет уравнению (36). Отсюда в силу единственности решения будет следовать, что $y_{22} = \bar{y}_{11}$ и $y_{21} = \bar{y}_{12}$, т.е. матрица $Y \in \Sigma_0 \bigcap \Xi$. Пусть

$$A_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} c & d \\ \bar{d} & \bar{c} \end{pmatrix},$$

тогда, записывая матричное уравнение (36) в виде системы линейных дифференциальных уравнений, получаем

$$\dot{y}_{11} + (ay_{11} + \bar{b}y_{12}) - (ay_{11} + by_{21}) = c, \tag{37a}$$
$$\dot{y}_{12} + (by_{11} + \bar{a}y_{12}) - (ay_{12} + by_{22}) = d, \tag{37b}$$
$$\dot{y}_{21} + (ay_{21} + \bar{b}y_{22}) - (\bar{b}y_{11} + \bar{a}y_{21}) = \bar{d}, \tag{37c}$$
$$\dot{y}_{22} + (by_{21} + \bar{a}y_{22}) - (\bar{b}y_{12} + \bar{a}y_{22}) = \bar{c}, \tag{37d}$$

Возьмем теперь комплексное сопряжение от обеих частей в каждом из этих уравнений. В полученную комплексно сопряженную систему вместо величин $\bar{y}_{ij}$ подставим соответствующие элементы матрицы $\tilde{Y}(t)$. После чего убеждаемся, что элементы $\tilde{y}_{ij}$ матрицы $\tilde{Y}(t)$ удовлетворяют уравнениям (37a)–(37d). Схематично процесс проверки того, что $\tilde{Y}(t)$ удовлетворяет уравнению (36), мы запишем в следующем виде:

$$\overline{(37a)} \to (37d), \quad \overline{(37b)} \to (37c), \quad \overline{(37c)} \to (37b), \quad \overline{(37d)} \to (37a),$$

где, например, запись $\overline{(37a)} \to (37d)$ означает, что если уравнение, комплексно сопряженное к уравнению (37a), мы перепишем в терминах элементов матрицы $\tilde{Y}(t)$, то убедимся, что соответствующие элементы $\tilde{y}_{ij}$ удовлетворяет уравнению (37d). Утверждение доказано. $\square$

Отметим теперь следующий очевидный факт. Поскольку определитель матрицы $A \in \Xi$ является действительным числом, то в случае, когда $\operatorname{tr} A = 0$, собственные числа матрицы A имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm z,$$

где $z \in \mathbb{R}$ или $z = \mathrm{i}\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$.

Вернемся теперь к усредненной системе (35). Заметим, что в силу только что доказанного утверждения все матрицы $A_{i_1\ldots i_l} \in \Xi$. Кроме того, поскольку в системе (34)

$$\operatorname{tr} A_1(\tau) = \operatorname{tr} A_2 = 0,$$

то все постоянные матрицы в усредненной системе (35), согласно теореме 2, имеют нулевой след, т.е. $\operatorname{tr} A_{i_1\ldots i_l} = 0$. Поэтому собственные числа матрицы

$$A(\tau) = A_{11}v_1^2(\tau) + A_2 v_2(\tau) + A_{112}v_1^2(\tau)v_2(\tau) + \ldots + A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(\tau)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(\tau) \tag{38}$$

при больших τ либо действительны, либо являются чисто мнимыми. Конкретный вид собственных чисел определяется главным в смысле асимптотики членом в выражении (38) (т.е. «ведущей» матрицей). Пусть

- $\beta + 2\rho - 1 > 0$.

В этом случае главным членом в выражении (38) является слагаемое $A_2 v_2(\tau)$. Собственные числа матрицы A_2 различны и имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\alpha\beta.$$

Поэтому собственные числа матрицы $A(\tau)/v_2(\tau)$ при больших τ являются чисто мнимыми и стремятся, соответственно к λ_1 и λ_2. Это, в свою очередь, означает, что усредненная система (35) может быть приведена к L-диагональному виду. Из теоремы Левинсона тогда следует, что в этом случае все решения уравнения (5) с функцией $\varphi(t)$ вида (7) ограничены при любых a и $\alpha \neq 0$.

- $\beta + 2\rho - 1 < 0$.

Главным членом в выражении (38) является теперь слагаемое $A_{11}v_1^2(\tau)$. Собственные числа матрицы A_{11} различны и имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{5}a^2}{24}.$$

Поэтому собственные числа матрицы $A(\tau)/v_1^2(\tau)$ при больших τ являются действительными и стремятся, соответственно к λ_1 и λ_2. Поэтому усредненная система (35) может быть приведена к L-диагональному виду. Из теоремы Левинсона следует, что в этом случае при любых $a \neq 0$ и $\alpha \neq 0$ у уравнения (5), (7) существуют неограничено растущие решения. (Здесь, конечно же, используется и тот факт, что при таких значениях параметров функция $v_1^2(\tau) \notin L_1[\tau_0, \infty)$.)

- $\beta + 2\rho - 1 = 0$.

Главным членом в выражении (38) является матрица $\Gamma\tau^{-2\rho}$, где

$$\Gamma = A_{11} + A_2 = -\mathfrak{i}\begin{pmatrix} \frac{a^2}{12} + \alpha\beta & -\frac{a^2}{8} \\ \frac{a^2}{8} & -\frac{a^2}{12} - \alpha\beta \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица Γ отличается от аналогичной матрицы в случае с $\varphi(t) = t + \alpha\ln t$ (ср. с (26)) лишь тем, что на месте величины α находится произведение $\alpha\beta$. Поэтому мы сразу же можем написать, что если

$$-\frac{5a^2}{24\beta} < \alpha < \frac{a^2}{24\beta}, \quad a, \alpha \neq 0,$$

то у уравнения (5), (7) существуют неограничено растущие решения. При этом несложно понять, что рост амплитуды колебаний происходит со скоростью

$$O\Big(\exp\Big\{\frac{\mu^*}{1-2\rho}t^{1-2\rho}\Big\}\Big), \qquad \mu^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4}{16} - \gamma^2}, \quad \gamma = 2\alpha\beta + \frac{a^2}{6}.$$

Если же

$$\alpha \in \Big(-\infty, -\frac{5a^2}{24\beta}\Big)\bigcup\Big(\frac{a^2}{24\beta}, \infty\Big),$$

то все решения уравнения (5), (7) ограничены.

Случай, когда $\beta + 2\rho - 1 = 0$ и

$$\alpha = -\frac{5a^2}{24\beta} \qquad \text{или} \qquad \alpha = \frac{a^2}{24\beta}, \quad a, \alpha \neq 0,$$

нуждается в дополнительном изучении. Он характеризуется тем усложняющим исследование обстоятельством, что у матрицы Γ имеется жорданова клетка.

Таким образом, мы можем сделать следующий вывод: гиперплоскость $\beta + 2\rho - 1 = 0$ разделяет пространство параметров (a, α, β, ρ) на два полупространства, в одном из которых решения уравнения (5), (7) устойчивы, а в другом, соответственно, неустойчивы. В точках гиперплоскости может иметь место как устойчивость, так и неустойчивость решений.

Список литературы

[1] *A.S. Abdullayev*, Justification of asymptotic formulas for the fourth Painleve equation // Studies in Applied Mathematics. - 1997. - V. 99, №3. - P. 255 – 283.

[2] *V. Burd*, Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval: Theory and Applications (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Volume 255) / Chapman & Hall/CRC, 2007.

[3] *V.Sh. Burd, V.A. Karakulin*, On the asymptotic integration of systems of linear differential equations with oscillatory decreasing coefficients // Mathematical Notes. - 1998. - V. 64, №5. - P. 571 – 578.

[4] *M.S.P. Eastham*, The asymptotic solution of linear differential systems / London Math. Soc. Monographs, Clarendon Press, 1989.

[5] *W.A. Harris Jr., D.A. Lutz*, On the asymptotic integration of linear differential systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 1974. - V. 48, №1. - P. 1 – 16.

[6] *W.A. Harris Jr., D.A. Lutz*, A Unified Theory of Asymptotic Integration // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 1977. - V. 57, №3. - P. 571 – 586.

[7] *N. Levinson*, The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. - 1948. - V. 15. - P. 111 – 126.

[8] *P.N. Nesterov*, Construction of the Asymptotics of the Solutions of the One-Dimensional Schrödinger Equation with Rapidly Oscillating Potential // Mathematical Notes. - 2006. - V. 80, №2. - P. 233 – 243.

[9] *P.N. Nesterov*, Averaging Method in the Asymptotic Integration Problem for Systems with Oscillatory-Decreasing Coefficients // Differential Equations. - 2007. - V. 43, №6. - P. 745 – 756.

[10] *A. Wintner*, The adiabatic linear oscillator // Amer. J. Math. - 1946. - V. 68. - P. 385 – 397.

[11] *A. Wintner*, Asymptotic integration of the adiabatic oscillator // Amer. J. Math. - 1946. - V. 69. - P. 251 – 272.

[12] *V.A. Yakubovich, V.M. Starzhinskii*, Linear differential equations with periodic coefficients. Vol. 1 and 2 / Keter Publishing House Jerusalem, 1975.