УДК 534.1

О КРАТНОМ РЕЗОНАНСЕ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ГАМИЛЬТОНА

А.П.Маркеев

1. Для многих задач об устойчивости и нелинейных колебаниях необходимо исследовать линейную, зависящую от малого параметра ε, 2π - периодическую по времени t гамильтонову систему с двумя или бóльшим числом степеней свободы. Будем предполагать, что функция Гамильтона этой системы аналитична относительно ε и при $\varepsilon = 0$ не зависит от t. Функция Гамильтона может зависеть еще от некоторых параметров. Для простоты будем далее считать, что она (помимо параметра ε) зависит еще только от одного параметра α, причем эта зависимость аналитическая. Примем также, что число степеней свободы системы равно двум. Через ω_1 и ω_2 обозначим частоты малых колебаний невозмущенной системы. Они являются функциями параметра α.

Задача об устойчивости возмущенной (при $0 < \varepsilon << 1$) системы (задача о параметрическом резонансе) исследована весьма подробно [1]. Получены формулы для нахождения границ областей неустойчивости в первом (а во многих случаях и во втором) приближении. В плоскости ε, α эти области могут исходить только из тех точек $\alpha = \alpha_0$ оси $\varepsilon = 0$, в которых реализуются резонансы первого или второго порядка, т. е. когда выполняется равенство

$$k_1\omega_1(\alpha_0) + k_2\omega_2(\alpha_0) = N \tag{1}$$

где k_1, k_2, N — целые числа, причем $|k_1| + |k_2| = 1$ или 2.

Исследовались, как правило, однократные резонансы (когда при $\alpha = \alpha_0$ выполняется только одно из резонансных соотношений (1)).

В статье рассматривается кратный параметрический резонанс. Предполагается, что при $\alpha = \alpha_0$ частоты малых колебаний ω_1, ω_2 удовлетворяют одновременно двум резонансным соотношениям (1):

$$2\omega_1 = N_1, \qquad 2\omega_2 = N_2 \tag{2}$$

где N_1, N_2 — целые неотрицательные числа. Предложен конструктивный алгоритм получения границ областей устойчивости и неустойчивости, исходящих в плоскости ε, α из точки $\alpha = \alpha_0$ оси $\varepsilon = 0$.

2. Кратко опишем алгоритм исследования только для одного из возможных типов кратного резонанса, когда частоты малых колебаний различны и не равны нулю. Уравнения границ областей неустойчивости, примыкающих при $\varepsilon = 0$ к точке $\alpha = \alpha_0$, будем искать в виде рядов:

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \alpha_m \qquad (3)$$

где коэффициенты α_m ($m \geq 1$) подлежат определению.

Подставим разложение (3) в исходную функцию Гамильтона $F(q_1, q_2, p_1, p_2, t; \alpha, \varepsilon)$ и произведем ее разложение в ряд по степеням ε. Затем по алгоритму из [2] сделаем каноническую замену переменных $q_1, q_2, p_1, p_2 \to \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$, приводящую невозмущенную (при $\varepsilon = 0$) часть гамильтониана к сумме гамильтонианов двух, не связанных один с другим, гармонических осцилляторов с частотами $\omega_1(\alpha_0)$ и $\omega_2(\alpha_0)$. Преобразованный гамильтониан $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t; \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, ...)$ запишется в виде

$$\Gamma = \Gamma_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} \Gamma_m(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \qquad (4)$$

где

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2}\sigma_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2}\sigma_2(\xi_2^2 + \eta_2^2) \qquad (5)$$

Здесь $\sigma_j = \delta_j \omega_j(\alpha_0)$ ($j = 1,2$), а величины δ_j равняются 1 или –1; их конкретные значения определяются в процессе построения замены переменных $q_1, q_2, p_1, p_2 \to \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$.

Следующим шагом является исключение из гамильтониана (4) его невозмущенной части Γ_0. Это достигается при помощи канонической замены переменных $\xi_j, \eta_j \to x_j, X_j$ ($j = 1.2$) по формулам

$$\xi_j = \cos(\sigma_j t) x_j + \sin(\sigma_j t) X_j, \quad \eta_j = -\sin(\sigma_j t) x_j + \cos(\sigma_j t) X_j \qquad (6)$$

где σ_j — величины, входящие в выражение (5) для невозмущенного гамильтониана. Разложение новой функции Гамильтона $H(x_1, x_2, X_1, X_2, t; \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, ...)$ в ряд будет иметь вид

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} H_m(x_1, x_2, X_1, X_2, t; \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \qquad (7)$$

где H_m ($m \geq 1$) — это функции Γ_m из разложения (4), в которых сделана замена переменных (6). Они являются квадратичными формами относительно переменных x_1, x_2, X_1, X_2 с τ - периодическими по t коэффициентами, причем $\tau = 2\pi$, если числа N_1 и N_2 в соотношениях (2) одновременно четны или нечетны, и $\tau = 4\pi$, если одно из этих чисел четно, а другое нечетно.

После приведения гамильтониана к виду (7) сделаем каноническое τ - периодическое по t, линейное преобразование $x_1, x_2, X_1, X_2 \to y_1, y_2, Y_1, Y_2$, исключающее время из нового гамильтониана $K(y_1, y_2, Y_1, Y_2, t; \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, ...)$ до членов порядка n (n может быть достаточно большим). Если затем в разложении K в ряд по ε пренебречь членами более высокой степени, чем n, то придем к приближенной автономной системе с двумя степенями свободы. И получение коэффициентов

$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ разложения (3) сводится к анализу биквадратного характеристического уравнения этой системы

$$\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$$

Достаточным условием устойчивости является выполнение неравенств

$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad d = a^2 - 4b > 0$$

Границы областей устойчивости и неустойчивости задаются соотношениями $a \ge 0, b = 0$ и $a \ge 0, d = 0$. Из разложений левых частей этих соотношений в ряды по степеням ε, получим систему уравнений для искомых коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

3.Для построения замены переменных $x_1, x_2, X_1, X_2 \to y_1, y_2, Y_1, Y_2$ и преобразованного гамильтониана K будем использовать метод Деприа – Хори в модификации Кемила [2]. При этом вычислительная процедура сильно упрощается, так как после замены (6) гамильтониан (7) задачи не содержит невозмущенной части.

Нахождение первого приближения по ε приводит к рассмотрению уравнения

$$K_1 = H_1(y_1, y_2, Y_1, Y_2, t, \alpha_1) - \frac{\partial W_1}{\partial t}$$

Требуется подобрать квадратичную относительно y_1, y_2, Y_1, Y_2 форму W_1 так, чтобы она была τ - периодической по t, а квадратичная форма K_1 имела постоянные коэффициенты. Этого можно добиться, положив

$$K_1 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau H_1 dt, \qquad W_1 = \int (H_1 - K_1) dt$$

Далее, из уравнения для второго приближения

$$K_2 = H_2 + (H_1 + K_1, W_1) - \frac{\partial W_2}{\partial t}$$

где $(H_1 + K_1, W_1)$— скобка Пуассона, получаем

$$K_2 = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau [H_2 + (H_1 + K_1, W_1]dt, \qquad W_2 = \int [H_2 + (H_1 + K_1, W_1) - K_2]dt$$

Совершенно аналогично по методу Депри – Хори можно построить третье и более высокие приближения. В n- ом приближении получим преобразованный гамильтониан K вида

$$K = \sum k_{m_1 m_2 n_1 n_2} y_1^{m_1} y_2^{m_2} Y_1^{n_1} Y_2^{n_2} \tag{8}$$

Здесь суммирование производится по целым неотрицательным числам m_1, m_2, n_1, n_2, сумма которых равна двум, а постоянные коэффициенты $k_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ вычисляются по формуле

$$k_{m_1 m_2 n_1 n_2} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\varepsilon^m}{m!} k^{(m)}_{m_1 m_2 n_1 n_2} (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$$

где $k^{(m)}_{m_1 m_2 n_1 n_2}$ — коэффициент при $y_1^{m_1} y_2^{m_2} Y_1^{n_1} Y_2^{n_2}$ в квадратичной форме K_m.

Следует отметить, что в конкретных задачах описанный алгоритм получения границ областей неустойчивости может оказаться довольно громоздким. Поэтому, его реализация, как правило, должна осуществляться при помощи компьютерных систем аналитических вычислений.

Подробности описанного алгоритма и результаты его применения в ограниченной эллиптической задаче трех тел и в ряде задач об устойчивости движения спутников относительно центра масс под действием гравитационных моментов изложены в статьях [3 – 6].

Литература

1.Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.

2.Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука. 1978. 312с.

3.А.П.Маркеев. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // ДАН, 2005, Т.402, № 3. С.339 – 343.

4.А.П.Маркеев. Об одном частном случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в Астрономический журнал. 2005, Т. 31. №5. С. 388 – 394.

5.А.П.Маркеев. Кратный резонанс в одной задаче об устойчивости движения спутника относительно центра масс // Письма в Астрономический журнал. 2005, Т. 31. №9. С.701 - 708 .

6. А.П.Маркеев. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // ПММ. 2006. Т. 70. Вып.2. С.200 – 220.

Институт проблем механики РАН, Россия, Москва

Поступила: 28.03.08.