УДК 534.1

КРУТИЛЬНЫЕ И ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

В.И. Ерофеев, В.В. Кажаев, Н.П. Семерикова

В работе предложены математические модели, описывающие крутильные колебания стержней при конечных углах закрутки, а также изгибные колебания балки с конечными прогибами и конечными углами поворота поперечного сечения. При линеаризации полученные уравнения совпадают, соответственно, с уравнением крутильных колебаний в технической теории Кулона и с уравнениями изгибных колебаний балки Тимошенко. Объединяет эти модели то, что для описания волновых процессов они могут быть сведены к уравнению «Двойной синус-Гордона», имеющему постоянные решения нулевой энергии, известные в физике как вакуумные состояния. Показано, что переход от одного состояния системы к другому может быть описан с помощью уединенной стационарной волны (солитона). Найдены аналитические решения исходных уравнений.

В основе технической теории кручения стержней, принадлежащей Ш.О.Кулону [1], лежат две гипотезы: недеформируемость поперечного сечения в своей плоскости (жесткий контур) и отсутствие продольных смещений (отсутствие депланации, т.е. выхода сечения из первоначального плоского состояния).Согласно этим гипотезам, сечения стержня скользят друг по другу, поворачиваясь в своей плоскости, как жесткие площадки. Смещения точек стержня, соответствующие этим предположениям, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u_1(x,y,z,t)=0 \\ u_2(x,y,z,t)=y(\cos\theta-1)-z\sin\theta \\ u_3(x,z,t)=y\sin\theta+z(\cos\theta-1) \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь x-продольная координата, y, z – поперечные координаты, $\theta(x,t)$- угол поворота поперечного сечения или угол закрутки. Заметим, что в технической теории углы закрутки θ являются малыми и приближенно считают, что $\cos\theta \approx 1, \sin\theta \approx \theta$.

Для вывода уравнений динамики стержня воспользуемся вариационным принципом Гамильтона-Остроградского. Для этого вычислим плотность функции Лагранжа $L = W_К - W_П$, равной разности плотностей кинетической $W_K = \iint_F \frac{1}{2}\rho_0\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dF$ и потенциальной $W_П = \iint_F \rho_0 U dF$ энергий. Здесь ρ_0 - объемная плотность среды, $\rho_0 U = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2$- объемная плотность внутренней энергии, $I_1 = \varepsilon_{ii}; I_2 = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}$ - алгебраические инварианты тензора деформаций $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(i, j, k = \overline{1,3}\right)$, λ, μ -константы Ламе, F - площадь поперечного сечения балки.

Интегрирование по поперечному сечению балки позволяет выразить напряженно-деформированное состояние в произвольной точке тела через величины, заданные вдоль оси стержня, т.е. перейти от трехмерных уравнений теории упругости к одномерным уравнениям теории стержней.

Плотности кинетической и потенциальной энергии определяются выражениями:

$$W_К = \frac{1}{2}\rho_0 I_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 \tag{2}$$

$$W_П = \frac{1}{2}\mu I_0\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + 2(\lambda+\mu)F(\cos\theta - 1)^2 \quad ., \tag{3}$$

где $I_0 = \iint\limits_F \left(y^2 + z^2\right)dF$ - полярный момент инерции, а уравнение крутильных колебаний стержня принимает вид:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - C_\tau^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = 4\frac{\lambda+\mu}{\rho_0}\frac{F}{I_0}(\cos\theta - 1)\sin\theta \tag{4}$$

Здесь $C_\tau = \sqrt{\mu/\rho_0}$ - скорость сдвиговых волн в неограниченной среде. В линейном приближении $(\cos\theta \approx 1, \sin\theta \approx \theta)$ крутильные волны описываются волновым уравнением и распространяются в стержне без дисперсии со скоростью сдвиговых волн C_τ. При конечных углах закрутки крутильные колебания описываются уравнением «Двойной синус-Гордона» [3].

Вводя безразмерные переменные $x' = x/(\Lambda d), t' = C_\tau t/(\Lambda d), \theta' = 2\theta$, где Λ-безразмерная длина волны, d – диаметр стержня, преобразуем (4) к виду:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = -2\left(\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta\right) \tag{5}$$

В (5) штрихи над безразмерными переменными опущены, а безразмерный параметр $4(\Lambda d)^2\frac{(\lambda+\mu)F}{\mu I_0}$, без нарушения общности, принят равным единице. Заметим, что (5) является уравнением «Двойной синус Гордона» [3]:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = A\left(\sin\frac{\theta}{2} - \alpha\sin\theta\right), \tag{6}$$

имеющего постоянные решения нулевой энергии $\theta = const\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$, в физике известные как вакуумные состояния.

Вакуумные состояния находятся из уравнения:

$$\sin\frac{\theta}{2} - \alpha\sin\theta = \sin\frac{\theta}{2}\left(1 - 2\alpha\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0. \qquad (7)$$

Из (7) видно, что при $0 < |\alpha| \le \frac{1}{2}$ таких состояний всего два, при $|\alpha| > \frac{1}{2}$ их может быть четыре. Переход от одного состояния системы к другому описывается с помощью уединенной стационарной волны (солитона). Такая разновидность солитона называется кинком.

При $a = \frac{1}{2}$ стационарное решение уравнения (6), а следовательно, и уравнения крутильных колебаний стержня при конечных углах закрутки (5) имеет вид:

$$\theta(\xi) = 4arctg\left(\frac{\sqrt{6}}{3}sh\left(\frac{3(x - Vt)}{\sqrt{6(V^2 - 1)}}\right)\right). \qquad (8)$$

Здесь ξ=x-Vt – бегущая координата, V- скорость стационарной волны, Δ=1- ширина солитона.

Рассмотрим изгиб балки. Предположим, что ее срединная линия совершает движение в плоскости (x, z). Перемещение произвольной точки, лежащей до деформации на нормали к срединной линии, однозначно определяется по вертикальному перемещению $W(x,t)$ точки срединной линии и углу поворота $\varphi(x,t)$ сечения относительно вертикальной оси. Тогда распределение смещений в произвольный момент времени t в обобщенных координатах $W(x,t)$ и $\varphi(x,t)$ имеет вид

$$\begin{cases} u_1(x,z,t) = -z\sin\varphi(x,t) \\ u_2(x,z,t) = 0 \\ u_3(x,z,t) = W(x,t) - z(1 - \cos\varphi(x,t)) \end{cases} \qquad (9)$$

Для вывода уравнений динамики балки применим вариационным принципом Гамильтона-Остроградского. Плотности кинетической и потенциальной энергии имеют вид:

$$W_K = \frac{\rho_0 I_y}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_0 F}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2; \qquad (10)$$

$$W_П = (\lambda + 2\mu)F\cos^2\varphi + \frac{1}{2}(\lambda + 3\mu)F\sin^2\varphi - (\lambda + 2\mu)F\cos\varphi - \mu F\frac{\partial W}{\partial x}\sin\varphi +$$
$$+\frac{1}{2}\mu F\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_y\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\mu I_y\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2\sin^2\varphi \quad . \tag{11}$$

Здесь $I_y = \iint\limits_F z^2 dF$ - осевой момент инерции. Из (10) видно, что в выражении кинетической энергии учитываются инерционные составляющие, связанные с поворотом сечений.

В результате получается следующая система уравнений динамики:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} - C_\tau^2\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + C_\tau^2\cos\varphi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \left(C_l^2\cos^2\varphi + C_\tau^2\sin^2\varphi\right)\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\lambda+\mu}{\rho_0}\sin\varphi\cos\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - . \\ -\dfrac{\lambda+\mu}{r_y^2\rho_0}\sin\varphi\cos\varphi + \dfrac{C_l^2}{r_y^2}\sin\varphi - \dfrac{C_\tau^2}{r_y^2}\cos\varphi\dfrac{\partial W}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $C_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_0}$ - скорость продольной в материале, $r_y = \sqrt{I_y / F}$ - осевой радиус инерции.

При выводе уравнений (12) растяжимостью срединной линии балки пренебрегалось. Избежать растяжения срединной линии при больших прогибах балки можно различными способами, например, если на одной ее границе выполняется условие жесткой заделки, а на второй границе находится подвижное шарнирное закрепление.

В линейном приближении можно считать, что $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx1$, и тогда система (12) совпадает с хорошо известной моделью балки Тимошенко [1], а при полиномиальной аппроксимации нелинейных слагаемых она совпадает с уравнениями геометрически нелинейной балки Тимошенко [2].

Решение системы (12) ищем в классе нелинейных стационарных волн $\varphi = \varphi(\xi)$, $W = W(\xi)$, $\xi = x - Vt$, т.е. возмущений, распространяющихся по стержню с постоянной скоростью V без изменения своей формы.

Если скорость нелинейной стационарной волны меньше скоростей линейных возмущений $V < C_\tau < C_l$ и $|\varphi| < \pi/4$, то (12) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{C_\tau^2}{C_l^2}\frac{\Lambda^2}{r_y^2}\frac{C_\tau^2 V^2}{\left(C_\tau^2 - V^2\right)}tg\varphi = 0\,, \tag{13}$$

где $\eta = \xi/\Lambda$, Λ - характерная длина волны.

Уравнение (13) имеет периодические решения, по форме близкие к синусоидальным.

Если скорость нелинейной стационарной волны больше скоростей линейных возмущений $V > C_l > C_\tau$, то система (12) сводится к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \sin\frac{\theta}{2} - \alpha\sin\theta = 0 \qquad (14)$$

Здесь приняты обозначения: $\theta = 2\varphi$, $\alpha = \frac{\Lambda^2}{r_y^2 V^2}\left(C_1^2 + \frac{C_\tau^2}{1 - V^2/C_\tau^2}\right)$, $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\rho_0}}$, а безразмерный параметр $\frac{2C_l^2\Lambda^2}{r_y^2 V^2}$ принят равным единице.

Заметим, что (14) является стационарным вариантом уравнения «Двойной синус-Гордона» (6), а параметр a может принимать любые значения. Как уже говорилось выше, при $0 < |\alpha| \le \frac{1}{2}$ вакуумных состояний всего два, при $|\alpha| > \frac{1}{2}$ их может быть четыре, а переход от одного состояния системы к другому описывается с помощью уединенной стационарной волны (солитона). При $|\alpha| \le \frac{1}{2}$ решение уравнения (14) имеет вид:

$$\theta(\xi) = 4arctg\left(Ce^{\xi/\Delta} - De^{-\xi/\Delta}\right), \qquad (15)$$

где $\Delta = \sqrt{\frac{1+2\alpha}{2}}$ характеризует ширину солитона, C и D связаны между собой соотношением $1 - 4(1+2\alpha)CD = 0, CD > 0$ и влияют только на фазу волны. В частности, при $C = D$ фаза равна нулю и решение (15) принимает вид:

$$\theta(\xi) = 4arctg\left(\frac{sh(\xi/\Delta)}{\sqrt{1+2\alpha}}\right). \qquad (16)$$

При этом φ изменяется от $-\pi$ до π (состояние $\theta = \theta' = 0$ является «центром»). Очевидно, что такое движение в рассматриваемой системе физически не реализуемо, однако оно является асимптотикой периодических стационарных волн меньшей амплитуды, существующих в системе и описываемых громоздкими выражениями, включающими в себя неполные эллиптические интегралы.

Наиболее интересный случай возникает при $\alpha > 1/2$. Состояние $\theta = \theta' = 0$ становится «седлом». Фазовый портрет системы представлен на рисунке.

Наряду с физически не реализуемым кинковым решением, аналогичным (16), в системе имеются солитоны колоколобразной формы:

$$\theta(\xi) = 4arctg\left(\frac{\sqrt{2\alpha - 1}}{ch\left(\frac{\xi\sqrt{4\alpha - 2}}{2}\right)}\right), \tag{17}$$

амплитуда, которых может быть сколь угодно мала. Так при $\alpha \to 1/2 + 0$ амплитуда стремится к нулю, а при $\alpha \to \infty$ к 2π. В системе, кроме того, могут реализовываться периодические стационарные волны, как однополярные, так и двухполярные, соответствующие межсепаратрисным фазовым траекториям.

При $\alpha < -1/2$ уравнение (14) имеет кинковое решение:

$$\theta(\xi) = 4arctg\left(b\ th\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)\right), \tag{18}$$

где $b^2 = \dfrac{2|\alpha| + 1}{2|\alpha| - 1}$ и $\Delta^2 = \dfrac{4(1 + b^2)}{1 + 2|\alpha|}$. Здесь $\|\theta\| \to 2\pi$ при $\alpha \to -1/2 - 0$, а при $\alpha \to -\infty$ уравнение (14) вырождается в классическое уравнение Синус-Гордона.

Солитоны (18), как и солитоны (16), в рассматриваемой системе физически не реализуемы, но и они служат асимптотикой стационарных периодических волн меньшей амплитуды.

Литература

1. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах./Ред. совет: Фролов К.В. (пред.). -М: Машиностроение. Т.1. : Колебания линейных систем. 2-е изд, испр. и доп. /Под ред.Болотина В.В. 1999. 504с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
3. Солитоны /Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри. – М.: Мир, 1983. 408с.

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН, Россия, Нижний Новгород

Поступила: 02.04.08.