УДК 531.36

К вопросу о сопряженных резонансах

В.Ш. Бурд

В работах [1-5] на физическом уровне строгости проведено теоретическое и экспериментальное исследование эффектов действия на нелинейные системы двухчастотного возбуждения с существенно различающимися частотами. В частности, в [1], [2] исследовалось возмущенное уравнение Дуффинга с отрицательной линейной жесткостью, а в [3] рассматривался маятник с вибрирующей осью подвеса. Исследование выполнено с помощью прямого метода разделения движений [6]. Этот метод пока не получил строгого математического обоснования.

В настоящей работе для исследования указанных выше задач применяется точный асимптотический метод. Именно, метод усреднения на бесконечном промежутке для систем с быстрыми и медленными возбуждениями (см. [7]). В случае уравнения Дуффинга полученные усредненные уравнения совпадают с уравнениями в [1], [2], к которым приводит метод прямого разделения движений. Для маятника с вибрирующим подвесом у нас получаются усредненные уравнения, которые отличаются от усредненных уравнений, полученных в [3]. Соответственно отличаются и формулы для резонансов.

Уравнение Дуффинга

Мы начнем с уравнения Дуффинга.

Рассмотрим вынужденное уравнение Дуффинга следующего вида

$$x'' + 2\delta x' - x + x^3 = A\cos\omega t + B\cos(\Omega t + \theta). \tag{1}$$

Здесь $A\cos\omega t$ - низкочастотное возбуждение, а $B\cos(\Omega t + \theta)$ - высокочастотное возбуждение. Именно это уравнение было изучено в работах [1] и [2].

Введем малый положительный параметр ε. Положим

$$\Omega = \frac{\nu}{\varepsilon}, \quad B = \frac{C}{\varepsilon^2}.$$

Уравнение (1) запишется в виде

$$x'' + 2\delta x' - x + x^3 = A\cos\omega t + \frac{C}{\varepsilon^2}\cos(\frac{\nu}{\varepsilon}t + \theta). \tag{2}$$

Таким образом, мы предполагаем, что на систему Дуффинга действует сумма двух сил - медленно осциллирующая сила и быстроосциллирующая сила с большой амплитудой.

Рассмотрим уравнение

$$x_0'' + 2\delta x_0' - x_0 = \frac{C}{\varepsilon^2}\cos(\frac{\nu}{\varepsilon}t + \theta).$$

Легко видеть, что это уравнение имеет единственное периодическое решение, которое можно записать в виде

$$x_0(t) = -\frac{C}{\nu^2}\cos(\frac{\nu}{\varepsilon}t + \theta) + O(\varepsilon^2).$$

В уравнении (2) произведем замену

$$x = x_0 + y.$$

Тогда получим уравнение

$$y'' + 2\delta y' - y + y^3 + 3x_0^2 y + 3x_0 y^2 + x_0^3 = A\cos\omega t. \tag{3}$$

От уравнения (3) перейдем к системе двух уравнений, положив $y' = z$. Получим систему

$$\begin{aligned} &y' = z, \\ &z' = -2\delta z + y - y^3 - 3x_0^2 y - 3x_0 y^2 - x_0^3 + A\cos\omega t. \end{aligned} \tag{4}$$

В системе (4) перейдем к быстрому времени τ, сделав замену

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon}.$$

Приходим к системе в стандартной форме в смысле Боголюбова (производную по τ обозначим точкой)

$$\begin{aligned} &\dot{y} = \varepsilon z, \\ &\dot{z} = \varepsilon[-2\delta z + y - y^3 - 3x_0^2 y - 3x_0 y^2 - x_0^3 + A\cos\varepsilon\omega\tau], \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$x_0(\tau) = -\frac{C}{\nu^2}\cos\nu\tau + O(\varepsilon^2).$$

Усредним систему (5) по быстрому времени τ. Усредненная система первого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{y} = \varepsilon z, \\ &\dot{z} = \varepsilon[-2\delta z + y - y^3 - \tfrac{3C^2}{2\nu^4} y + A\cos\varepsilon\omega\tau]. \end{aligned} \tag{6}$$

Систему (6) можно записать в виде уравнения второго порядка. Сделаем это и вернемся к исходному времени t. Тогда усредненная система (6) примет вид

$$y'' + 2\delta y' + \left(\frac{3C^2}{2\nu^4} - 1\right) y + y^3 = A\cos\omega t.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим

$$y'' + 2\delta y' + \left(\frac{3B^2}{2\Omega^4} - 1\right) y + y^3 = A\cos\omega t. \tag{7}$$

Уравнение (7) совпадает с усредненным уравнением, полученным в [1] и [2]. Отметим, что кроме приближенного анализа уравнения (7), проведенного в [1] и [2], можно получить и точные результаты для системы (5). Например, если уравнение (7) имеет асимптотически устойчивое периодическое решение с периодом $2\pi/\omega$, то система (5) при достаточно малых ε имеет асимптотически устойчивое почти периодическое (двухчастотное) решение.

Аналогично исследуется и система, описываемая обычным уравнением Дуффинга

$$x'' + 2\delta x' + x + \alpha x^3 = A\cos\omega t + \frac{C}{\varepsilon^2}\cos(\frac{\nu}{\varepsilon}t + \theta),$$

возмущенная двухчастотной силой с существенно различающимися частотами.

Маятник с вибрирующим подвесом

Рассмотрим простой маятник. Пусть ось маятника совершает колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях под действием двухчастотного возбуждения с существенно различающимися частотами. Пусть эти колебания определяются следующими формулами

$$x(t) = F_1(t) = H_\Omega \sin\Omega t + H_\omega \sin\omega t,$$

$$y(t) = F_2(t) = G_\Omega \cos(\Omega t + \theta_\Omega) + G_\omega \cos(\omega t + \theta_\omega).$$

Уравнение движения маятника в форме Лагранжа имеет вид

$$q'' + \frac{2c}{m}q' + \left[\frac{g}{l} + \frac{F_2''}{l}\right]\sin q + \frac{F_1''}{l}\cos q = 0.$$

Здесь q - угол отклонения маятника от нижнего положения, m - масса маятника, c - коэффициент вязкого сопротивления, g - ускорение свободного падения.

От уравнения в форме Лагранжа переходим к системе в гамильтоновой форме

$$
\begin{array}{l}
\frac{dq}{dt} = \frac{1}{ml^2}p - \frac{F_1'}{l}\cos q - \frac{F_2'}{l}\sin q, \\
\frac{dp}{dt} = -\frac{2c}{m}p + (2cl\cos q - \frac{p}{l}\sin q)F_1' + (2cl\sin q + \frac{p}{l}\cos q)F_2' + \\
+\frac{m}{2}[(F_1')^2 - (F_2')^2]\sin 2q - mF_1'F_2'\cos 2q - mgl\sin q.
\end{array} \tag{8}
$$

Будем предполагать, что частота Ω достаточно велика, а амплитуды высокочастотных вибраций достаточно малы. А именно, предположим, что существует такой малый положительный параметр ε, для которого $G_\Omega = \varepsilon a_1$, $H_\Omega = \varepsilon a_2$, $\Omega = \frac{\nu}{\varepsilon}$. Для законов движения подвеса получим

$$
F_1(t) = \varepsilon a_1 \sin\frac{\nu}{\varepsilon}t + H_\omega \sin\omega t, \quad F_2(t) = \varepsilon a_2 \cos(\frac{\nu}{\varepsilon}t + \theta_\Omega) + G_\omega\cos(\omega t + \theta_\omega).
$$

Переходя к быстрому времени $\varepsilon\tau = t$ и обозначая дифференцирование по τ точкой, получим

$$
\begin{array}{l}
\dot q = \varepsilon\left[\frac{1}{ml^2}p - \frac{\dot F_1}{l}\cos q - \frac{\dot F_2}{l}\sin q\right], \\
\dot p = \varepsilon\left[-\frac{2c}{m}p + (2cl\cos q - \frac{p}{l}\sin q)\dot F_1 + (2cl\sin q + \frac{p}{l}\cos q)\dot F_2 + \right. \\
\left. +\frac{m}{2}(\dot F_1^2 - \dot F_2^2)\sin 2q - m\dot F_1 \dot F_2\cos 2q - mgl\sin q\right].
\end{array} \tag{9}
$$

Здесь

$$
\dot F_1(\tau) = a_1\nu\cos\nu\tau + H_\omega\omega\cos\omega\varepsilon\tau,
$$

$$
\dot F_2(\tau) = -a_2\nu\sin(\nu\tau + \theta_\Omega) - G_\omega\omega\sin(\omega\varepsilon\tau + \theta_\omega).
$$

Система (9) представляет собой систему в стандартной форме, правые части которой содержат слагаемые с быстрым временем τ и медленным временем $\varepsilon\tau$. Усредняя правые части по быстрому времени, получим систему

$$
\begin{array}{l}
\dot q = \varepsilon\left[\frac{1}{ml^2}p - \frac{f_1(\tau)}{l}\cos q - \frac{f_2(\tau)}{l}\sin q\right], \\
\dot p = \varepsilon\left[-\frac{2c}{m}p + (2cl\cos q - \frac{p}{l}\sin q)f_1(\tau) + (2cl\sin q + \frac{p}{l}\cos q)f_2(\tau) + \right. \\
\left. +\frac{m}{2}(f_3(\tau) - f_4(\tau))\sin 2q - mf_5(\tau)\cos 2q - mgl\sin q\right],
\end{array} \tag{10}
$$

где $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$, $f_3(\tau)$, $f_4(\tau)$, $f_5(\tau)$ - средние значения по быстрому времени Функций $\dot F_1(\tau)$, $\dot F_2(\tau)$, $\dot F_1^2(\tau)$, $\dot F_2^2(\tau)$, $\dot F_1(\tau)\dot F_2(\tau)$ соответственно. Выполняя вычисления получим систему

$$\begin{array}{l}\dot{q} = \varepsilon\left[\frac{1}{ml^2}p - \frac{H_\omega \cos\varepsilon\omega\tau}{l}\cos q + \frac{G_\omega\omega\sin(\varepsilon\omega\tau+\theta_\omega)}{l}\sin q\right],\\ \dot{p} = \varepsilon\left[-\frac{2c}{m}p + \left(2cl\cos q - \frac{p}{l}\sin q\right)H_\omega\omega\cos\varepsilon\omega\tau -\right.\\ \left(2cl\sin q + \frac{p}{l}\cos q\right)G_\omega\omega\sin(\varepsilon\omega\tau+\theta_\omega) + \frac{m}{2}\left(\frac{a_1^2\nu^2}{2}+\right.\\ \left.H_\omega^2\omega^2\cos^2\varepsilon\omega\tau - \frac{a_2^2\nu^2}{2} - G_\omega^2\omega^2\sin^2(\varepsilon\omega\tau+\theta_\omega)\right)\sin 2q+\\ \left.m\left(\frac{a_1a_2\nu^2}{2}\sin\theta_\Omega - H_\omega G_\omega\omega^2\cos\varepsilon\omega\tau\sin(\varepsilon\omega\tau+\theta_\omega)\right)\cos 2q - mgl\sin q\right].\end{array} \tag{11}$$

Правые части системы (11) зависят от медленного времени $\varepsilon\omega\tau$. Усредненная система (11) - это система с периодическими коэффициентами. Как известно (см. [7]), если усредненная система (11) имеет асимптотически устойчивое периодическое решение, то системы (9) имеет асимптотический устойчивое почти периодическое решение.

Система (11) довольна сложна. Поэтому сделаем некоторые, упрощающие эту систему, предположения. Будем предполагать, что $H_\Omega = G_\omega = 0$, т.е. маятник подвержен быстрым осцилляциям вдоль вертикальной оси и медленным осцилляциям вдоль горизонтальной оси. При этих предположениях система (11) принимает вид

$$\begin{array}{l}\dot{q} = \varepsilon\left[\frac{1}{ml^2}p - \frac{H_\omega\cos\varepsilon\omega\tau}{l}\cos q\right],\\ \dot{p} = \varepsilon\left[-\frac{2c}{m}p + \left(2cl\cos q - \frac{p}{l}\sin q\right)H_\omega\cos\varepsilon\omega\tau +\right.\\ \left.\frac{m}{2}\left(H_\omega^2\omega^2\cos^2\varepsilon\omega\tau - \frac{a_1^2\nu^2}{2}\right)\sin 2q - mgl\sin q\right].\end{array} \tag{12}$$

Вернемся к исходному времени t, сделав замену $\tau = t/\varepsilon$ и вспомним, что $\nu = \varepsilon\Omega$ и $a_1 = G_\Omega\varepsilon$. Получим систему (производные по t снова обозначим штрихом)

$$\begin{array}{l}q' = \frac{1}{ml^2}p - \frac{H_\omega\cos\omega t}{l}\cos q,\\ p' = -\frac{2c}{m}p + \left(2cl\cos q - \frac{p}{l}\sin q\right)H_\omega\cos\omega t+\\ \frac{m}{2}(H_\omega^2\omega^2\cos^2\omega t - \frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2})\sin 2q - mgl\sin q.\end{array} \tag{13}$$

Исследуем малые колебания в системе (13), т.е. рассмотрим линейную систему

$$\begin{array}{l}q' = \frac{1}{ml^2}p + \frac{H_\omega\cos\omega t}{l},\\ p' = -\frac{2c}{m}p + 2clH_\omega\cos\omega t+\\ m\left(H_\omega^2\omega^2\cos^2\omega t - \frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2}\right)q - mglq.\end{array} \tag{14}$$

Упростим последнюю систему, пренебрегая затуханием. Получим систему

$$\begin{array}{l}q' = \frac{1}{ml^2}p + \frac{H_\omega\cos\omega t}{l},\\ p' = m\left(H_\omega^2\omega^2\cos^2\omega t - \frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2}\right)q - mglq.\end{array} \tag{15}$$

Систему (15) можно записать в виде уравнения второго порядка

$$q'' = \frac{1}{l^2}(H_\omega^2\omega^2 + H_\omega^2\omega^2\cos 2\omega t - \frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2})q - \frac{g}{l}q - \frac{1}{l}H_\omega\omega\sin\omega t,$$

или,

$$q'' + \frac{1}{l^2}\left(-H_\omega^2\omega^2 + \frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2} + gl - \frac{1}{2l^2}H_\omega^2\omega^2\cos 2\omega t\right)q + \frac{1}{l}H_\omega\omega\cos\omega t. \qquad (16)$$

Будем предполагать, что выполняется неравенство

$$-H_\omega^2\omega^2 + \frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2} + gl > 0,$$

которое означает, что собственные колебания системы (16) носят устойчивый характер.

Уравнение (16) представляет собой периодически возмущенное уравнение Матье.

В системе (16) обычный резонанс происходит при

$$\omega^2 = \frac{1}{l^2}(-H_\omega^2\omega^2 + \frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2} + gl).$$

Отсюда следует, что

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2} + gl}{1 + \frac{H_\omega^2}{l^2}}}. \qquad (17)$$

Резонансы, частоты которых связаны соотношением типа (17), в [1,2,3] названы сопряженными. Формула (17) отличается от формулы, полученной в [3]. Формула в [3] в наших обозначениях имеет вид

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2} + gl}.$$

Уравнение (16) содержит также член, который вызывает параметрический резонанс. Частота параметрического резонанса определяется той же формулой (17). Точнее, параметрический резонанс возникает при изменнии частоты в некотором интервале оси частот с центром в точке ω, определяемом формулой (17). Если при измененни параметров мы получим соотношение, близкое к соотношению сопряженности резонансов, т.е. соотношению (17), то нулевое решение уравнения (16) станет неустойчивым.

Усредненые уравнения малых колебаний в окрестности верхнего состояния равновесия невозмущенного маятника определяются уравнением

$$q'' + \frac{1}{l^2}\left(-H_\omega^2\omega^2 + \frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2} - gl + \frac{1}{2l^2}H_\omega^2\omega^2\cos 2(\omega t + \theta_\omega)\right)q- \\ \frac{1}{ml^2}H_\omega\omega\sin(\omega t + \theta_\omega) + \frac{1}{l}H_\omega\omega\cos(\omega t + \theta_\omega).$$

При выполнении неравенства

$$-H_\omega^2\omega^2 + \frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2} - gl > 0$$

резонансное соотношение имеет вид

$$\omega = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\frac{G_\Omega^2\Omega^2}{2} - gl}{1 + \frac{H_\omega^2}{l^2}}}.$$

Литература

1. Блехман И.И., Ланда П.С.// Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002.N 1/2. С. 44–51.

2. Blekhman I.I., Landa P.S. Conjugate resonances and bifurcations in nonlinear systems under biharmonical excitation// International Journal of Non-Linear Mechanics, V. 39, 2004. P. 421–426.

3. Блехман И.И., Ланда П.С. Эффект сопряженности резонансов и бифуркаций при двухчастотном воздействии на маятник с вибрирующей осью подвеса// Доклады Академии Наук, 2004, том 395, N 2, с. 192–195.

4. Baltanas J.P., Lopez L., Blechman I.I., Landa P.S., Zaikin A., Kurths J. and Sanhuan M.A.F. Experimental evidence, numerics, and theory of vibrational resonance in bestable systems,//Physical Review, E 67, 066119, p. 1–7.

5. Landa P.S., McClintock P,V.E. Vibrational Resonance//J. Phys. A: Math. Gen. V. 33, 2000, p. 433–438.

6. Блехман И.И. Вибрационная механика. - Физматлит, 1994.- 400с.

7. Burd V. Method of Averaging for Differential Equations on an Infinite Interval. Theory and Applications, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 255, Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, 360 pp.