

УДК 621.01

НЕЛИНЕЙНЫЕ УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНОЙ НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

И.С. Павлов, В.А. Лазарев

Рассмотрена двумерная модель нанокристаллической среды с квадратной решеткой. Считается, что частицы такой среды имеют круглую форму и обладают двумя трансляционными и одной ротационной степенями свободы. Выведены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие распространение упругих и ротационных волн в таких средах. Найдены в аналитическом виде зависимости между константами макроупругости среды и параметрами микроструктуры. Проведен сравнительный анализ дисперсионных свойств нормальных волн, распространяющихся вдоль разных кристаллографических направлений. Предложен вариант градиентной модели для низкочастотных упругих волн.

Введение

В настоящее время для моделирования структурированных материалов широкое распространение получили обобщенные микрополярные теории типа континуума Коссера, выводимые из общих соображений. В эти феноменологические теории входит большое число материальных констант, требующих экспериментального определения, а их связь со структурой материала не ясна. Альтернативой здесь служит метод структурного моделирования, предполагающий выделение в массиве материала некоторого минимального объема – структурной ячейки – способной отображать основные черты макроскопического поведения материала [1-3]. Ячейку рассматривают как некоторую конструкцию, функционирование которой обеспечивается ее внутренним устройством и взаимодействием с окружением. При структурном моделировании нанокристаллический материал представляется регулярной или квазирегулярной решеткой, в узлах которой расположены не материальные точки, а тела малых размеров, обладающие внутренними степенями свободы. В качестве тел могут выступать домены, гранулы, нанотрубки, кластеры из наночастиц и т.п. В отличие от феноменологических моделей, структурные модели явным образом содержат параметры, характеризующие геометрическую структуру материала (период решетки, размеры частиц, их форму), и поэтому являются наиболее подходящими моделями для изучения влияния размерных эффектов на макросвойства материала. Прозрачность связи структуры среды с ее макрохарактеристиками открывает большие возможности для целенаправленного проектирования материалов с заданными физико-механическими свойствами. Структурные модели позволяют получать не только представление о качественном влиянии локальной структуры на эффективные модули упругости, но и проводить количественные оценки их величин, что недоступно для феноменологических теорий [3, 4].

В данной работе разработана нелинейная динамическая модель двумерной нанокристаллической среды с квадратной решеткой, в узлах которой расположены жесткие частицы (фаза 1), обладающие ротационными степенями свободы, а межчастичное

(поровое) пространство представляет собой безмассовую нелинейно-упругую среду (фаза 2), через которую передаются силовые и моментные воздействия.

1. Дискретная модель

Рассматривается двумерная квадратная решетка, состоящая из однородных круглых частиц (гранул или зерен) массы M и диаметром d . В исходном состоянии ($t=0$) они сосредоточены в узлах решетки, и расстояние между центрами масс соседних гранул как вдоль оси x , так и вдоль оси y равно a (рис. 1). При движении в плоскости каждая частица имеет три степени свободы: смещение центра масс частицы с номером $N=N(i, j)$ по осям x и y (трансляционные степени свободы $u_{i,j}$ и $w_{i,j}$) и поворот относительно центра масс (ротационная степень свободы $\phi_{i,j}$) (рис. 2). Кинетическая энергия частицы $N(i, j)$ равна

$$T_{i,j} = \frac{M}{2} (\dot{u}_{i,j}^2 + \dot{w}_{i,j}^2) + \frac{J}{2} \dot{\phi}_{i,j}^2. \quad (1)$$

Здесь $J = Md^2 / 8$ - момент инерции частицы относительно оси, проходящей через центр масс. Точка сверху обозначает производную по времени.

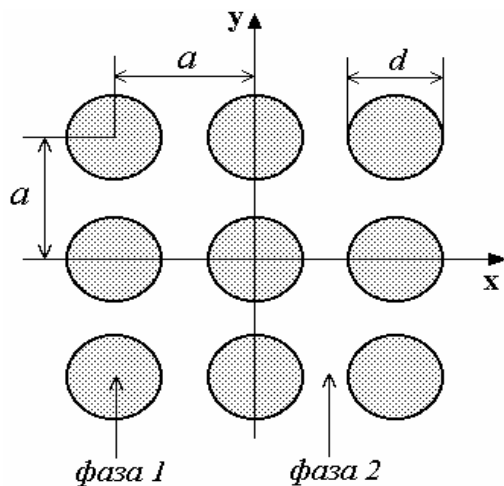


Рис. 1

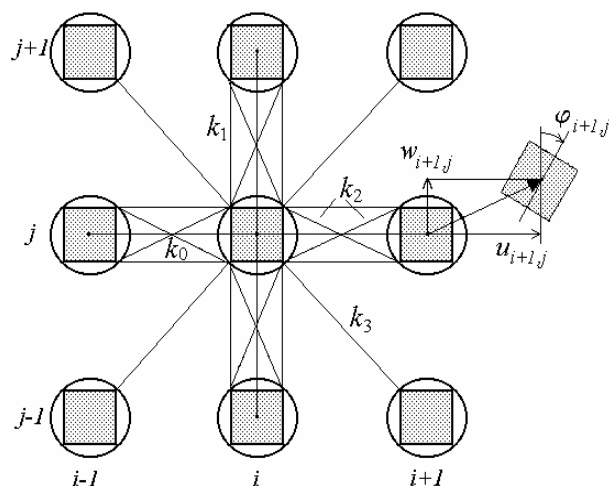


Рис. 2

Считается, что частица N взаимодействует лишь с восемью ближайшими соседями по решетке, центры масс четырех из которых лежат на горизонтальной и вертикальной прямых, а других четырех – на диагоналях (рис. 2). Первые четыре частицы, центры масс которых расположены на окружности радиуса a , в дальнейшем будем называть частицами *1-ой координационной сферы*, а остальные – частицами *2-ой координационной сферы* (их центры находятся на окружности радиуса $a\sqrt{2}$), причем центры обеих окружностей совпадают с частицей N . Центральные и нецентральные взаимодействия соседних гранул моделируются упругими пружинами четырех типов [3, 5, 6].

Центральные пружины с жесткостью k_0 совместно с горизонтальными и вертикальными пружинами с жесткостью k_1 определяют силовые взаимодействия при растяжении-сжатии материала. Пружины типа k_1 осуществляют также передачу моментов при поворотах частиц. Диагональные пружины с жесткостью k_2 характеризуют силовые взаимодействия частиц при сдвиговых деформациях в материале. И, наконец, пружины с жесткостью k_3 моделируют взаимодействие с зёрнами второй координационной сферы. Смещения зёрен считаются малыми по сравнению с размерами элементарной ячейки $2a \times 2a$. Взаимодействие частиц при отклонениях от положения равновесия определяется относительными удлинениями пружин (рис. 2). Потенциальная энергия частицы N , обусловленная ее взаимодействием с восемью ближайшими соседями по решетке, задается формулой

$$U_N = \frac{k_0}{2} \sum_{n=1}^4 (D_{0n}^2 + \gamma D_{0n}^3) + \frac{k_1}{2} \sum_{n=1}^8 D_{1n}^2 + \frac{k_2}{2} \sum_{n=1}^8 D_{2n}^2 + \frac{k_3}{2} \sum_{n=1}^4 D_{3n}^2. \quad (2)$$

Здесь D_m – относительные удлинения пружин, соединяющих частицу с ее соседями [3], $l=0, 1, 2, 3$ – тип пружины, γ – параметр нелинейного взаимодействия. По выражениям (1) и (2) с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода можно получить дифференциально-разностные уравнения, описывающие динамику решетки.

2. Континуальное приближение

В случае длинноволновых возмущений, когда $\lambda \gg a$ (где λ – характерный пространственный масштаб деформации) от дискретных переменных i и j можно перейти к непрерывным пространственным переменным $x=ia$ и $y=ja$. При этом функции, заданные в дискретных точках, интерполируются непрерывными функциями и их частными производными:

$$u_{i+p,j+q}(t) = u(x+pa, y+qa, t) = u(x, y, t) + a \left(p \frac{\partial u}{\partial x} + q \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{a^2}{2} \left(p^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2pq \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + q^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \pm \dots, \quad (3)$$

где $p = \pm 1$, $q = \pm 1$. Аналогичные разложения используются и для функций $w_{i+p,j+q}(t)$ и $\varphi_{i+p,j+q}(t)$. В зависимости от количества слагаемых, удерживаемых в разложении (3), можно рассматривать различные континуальные и квазиконтинуальные модели нанокристаллической среды [3, 7].

Если в (3) ограничиться учетом слагаемых лишь порядка $O(a)$, то соответствует локальной теории упругости, то двумерная плотность функции Лагранжа L (лагранжиан) примет вид:

$$L = \frac{\rho}{2} (u_t^2 + w_t^2 + R^2 \varphi_t^2) - \frac{\rho}{2} [c_1^2 (u_x^2 + w_y^2) + c_2^2 (w_x^2 + u_y^2) + R^2 c_3^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + s^2 (u_x w_y + u_y w_x) + 2\beta (w_x - u_y) \varphi + 2\beta \varphi^2] + L_{nl}, \quad (4)$$

Здесь L_{nl} – часть лагранжиана, содержащая кубическую нелинейность. Далее, с помощью вариационного принципа Гамильтона-Остроградского из лагранжиана (4) нахо-

дится система дифференциальных уравнений первого приближения, описывающая динамические процессы в нанокристаллической среде:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - c_2^2 u_{yy} - s^2 w_{xy} + \beta \varphi_y &= \frac{1}{2} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_2}{\partial y}, \\ w_{tt} - c_2^2 w_{xx} - c_1^2 w_{yy} - s^2 u_{xy} - \beta \varphi_x &= \frac{1}{2} \frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial F_4}{\partial y}, \\ \varphi_{tt} - c_3^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \beta R^{-2} (2\varphi + w_x - u_y) &= R^{-2} F_5. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены обозначения: c_i ($i = 1 \div 3$) – скорости распространения соответственно продольной, сдвиговой волн и волны микровращений (ротационной волны), s – коэффициент линейной связи между продольными и сдвиговыми волнами, β – параметр линейной связи волны микровращений с поперечной и продольной, $R = \sqrt{J/M} = d/\sqrt{8}$ – радиус инерции микрочастиц среды относительно центра масс. Кроме того, введены нелинейные функции:

$$\begin{aligned} F_1 &= 3\alpha_1 u_x^2 + \alpha_2 w_x^2 + \alpha_3 \varphi^2 + \alpha_4 w_x \varphi + \alpha_5 (3u_y^2 - w_y^2 - 2u_x w_y - 2u_y w_x - 6u_y \varphi), \\ F_2 &= 2\alpha_2 u_y w_y - \alpha_4 w_y \varphi + 2\alpha_5 (3u_x u_y - 3u_x \varphi - u_x w_x - w_x w_y), \\ F_3 &= 2\alpha_2 u_x w_x + \alpha_4 u_x \varphi + 2\alpha_5 (3w_x w_y + 3w_y \varphi - u_x u_y - u_y w_y), \\ F_4 &= 3\alpha_1 w_y^2 + \alpha_2 u_y^2 + \alpha_3 \varphi^2 - \alpha_4 u_y \varphi + \alpha_5 (3w_x^2 - u_x^2 - 2u_x w_y - 2u_y w_x + 6w_x \varphi), \\ F_5 &= -\alpha_3 (u_x + w_y) \varphi + \frac{1}{2} \alpha_4 (u_y w_y - u_x w_x) + 3\alpha_5 (u_x u_y - w_x w_y), \end{aligned}$$

где α_j ($j = 1 \div 5$) – коэффициенты нелинейного взаимодействия волн. Правым (нелинейным) частям уравнений (5) в лагранжиане (4) соответствует L_{nl} .

Система (5) описывает динамику нанокристаллической среды с учетом локальных взаимодействий частиц и отличается от уравнений классической теории упругости появлением дополнительного уравнения для волны микровращений, которое имеет однородное в пространстве и осциллирующее во времени решение, удовлетворяющее уравнению $\varphi_{tt} + \omega_0^2 \varphi = 0$, где $\omega_0 = \sqrt{2\beta/R^2}$ – собственная частота микроповоротов. По структуре линейные части уравнений (5) совпадают с уравнениями анизотропного континуума Коссера с центрально-симметричными частицами [5]. Однако в отличие от теории Коссера в предложенной модели коэффициенты явным образом зависят от размеров частиц и параметров их силового взаимодействия. Так, коэффициенты уравнений (5) следующим образом выражаются через силовые постоянные k_0, k_1, k_2, k_3 и диаметр частиц d :

$$\begin{aligned} \rho c_1^2 &= k_0 + 2k_1 + \frac{2h^2}{r^2} k_2 + k_3, & \rho c_2^2 &= \frac{d^2}{r^2} k_2 + k_3, & \rho c_3^2 &= 2 \left(k_1 + \frac{a^2}{r^2} k_2 \right), \\ \rho s^2 &= 2k_3, & \rho \beta &= \frac{d^2}{r^2} k_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\rho = M/a^2$ – среднее значение плотности двумерной зернистой среды, $h = a - d/\sqrt{2}$ и $r = \sqrt{0,5d^2 + h^2}$ – начальные длины горизонтальных и диагональных пружин соответственно. Первая формула (6) выражает зависимость скорости продольной волны от размеров зерен, что соответствует известным экспериментальным данным и не может быть объяснено в рамках теории Коссера [5, 8].

Коэффициенты нелинейных взаимодействий в уравнениях (5) имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a}{2\rho h} \left(\gamma k_0 + \frac{2d^2 h^2}{r^4} k_2 + k_3 \right), & \alpha_2 &= \frac{a}{2\rho h} \left(k_0 + 2k_1 + \frac{h^2}{r^4} (h^2 - d^2) k_2 - k_3 \right), \\ \alpha_3 &= \frac{2d^2}{\rho a h} (k_1 + 2k_3) + \frac{2d^2}{\rho a r^4} (d - h\sqrt{2})(d^2 \sqrt{2} + 3dh - h^2 \sqrt{2}) k_2, & (7) \\ \alpha_4 &= \frac{d\sqrt{2}}{\rho h} \left(k_1 + \frac{ah(h\sqrt{2} - d)^2}{r^4} k_2 \right), & \alpha_5 &= \frac{a}{2\rho h} k_3. \end{aligned}$$

3. Вычисление эффективных модулей макроупругости

В низкочастотной области, когда можно пренебречь вращательными степенями свободы частиц (т.е. $\varphi = 0$), линейные части уравнений (5) совпадают с двумерными уравнениями Ламе для анизотропной среды с кубической симметрией [9]. Связь между скоростями распространения продольной (c_1) и сдвиговой (c_2) волн и параметром s , с одной стороны, и упругими постоянными C_{11} , C_{12} и C_{44} , с другой, имеет вид:

$$c_1^2 = C_{11} / \rho_V, \quad c_2^2 = C_{44} / \rho_V, \quad s^2 = (C_{12} + C_{44}) / \rho_V. \quad (8)$$

Здесь $\rho_V = \rho/a$ – “объемная” плотность среды. Используя соотношения (8) и (6), можно найти взаимосвязь между коэффициентами матрицы упругих постоянных и параметрами микроструктуры материала. Так, выражения силовых констант микромоделли через модули упругости среды имеют вид:

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{a}{2} (C_{44} + C_{12}), & k_2 &= \frac{a}{4} (C_{44} - C_{12}) \left(1 + 2 \left(\frac{a}{d} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right), & (9) \\ k_0 + 2k_1 &= aC_{11} - \frac{a}{2} (C_{44} + C_{12}) - a(C_{44} - C_{12}) \left(\frac{a}{d} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Соотношения (9) могут быть полезны для оценки параметров волны микровращений и коэффициентов нелинейных взаимодействий. В частности, скорость ротационной волны выражается через константы упругости следующим образом:

$$c_3^2 = \frac{2}{\rho_V (K + 2)} \left[C_{11} - C_{44} + \frac{K + 4\sqrt{2}(d/a)}{2(d/a)^2} (C_{44} - C_{12}) \right],$$

где $K = k_0/k_1$ – отношение между центральными и нецентральными взаимодействиями.

В таблице 1 приведены вычисленные по известным экспериментальным данным при комнатной температуре [10] значения скорости ротационной волны, приведенной частоты этой волны $\omega_0 d = \sqrt{8(C_{44} - C_{12}) / \rho_V}$ и коэффициентов нелинейных взаимодействий для некоторых кубических кристаллов. При вычислениях принималось $d/a = 0,9$ и $K = 10$ (центральные взаимодействия доминируют). Как показали расчёты, при значениях $0,9 < d/a < 0,99$ величина c_3 изменяется менее, чем на 10%.

Таблица 1.

Параметры структуры		Кристалл		
		LiF	NaF	NaBr
Плотность (кг/м ³) (экспериментальные данные)	ρ_V	2600	2800	3200
Упругие постоянные (10 ⁹ Н/м ²) (экспериментальные данные)	C_{11}	113.00	97.00	32.55
	C_{12}	48.00	25.60	13.14
	C_{44}	63.00	28.00	13.26
Скорости волн (м/с)	c_1	6593	5890	3190
	c_2	4922	3162	2036
	c_3	3264	2283	1026
Нормированная критическая частота спиновых волн (м/с).	$\omega_0 d$	46150	6860	300
Коэффициенты нелинейностей (10 ⁷ м ² /с ²)	α_1	5.1	3.3	1.6
	α_2	-0.1	2.1	-0.3
	α_3	20.6	9.6	7.7
	α_4	0.7	0.7	1.8
	α_5	2.9	1.3	1.1

Из таблицы 1 видно, что для всех рассмотренных материалов скорость ротационной волны является наименьшей. Оценки показывают, что в нанокристаллической среде с диаметром зерна $d = 100 \text{ нм} = 10^{-7} \text{ м}$ критические частоты лежат в интервале от $\omega_0 \approx 461,5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ (для LiF) до $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ (для NaBr).

4. Дисперсионные свойства нормальных волн

Будем искать решения линейных частей уравнений (5) в форме плоских гармонических волн вида $u(\mathbf{r}, t), w(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}, t) \propto \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$, где ω – частота колебаний, $\mathbf{k}\mathbf{r} = k_x x + k_y y$ – изменение фазы волны вдоль направления распространения. Тогда из уравнения движения получим дисперсионное уравнение

$$\omega^6 - A_1 \omega^4 + A_2 \omega^2 + A_3 = 0 \quad (10)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)k^2 + \omega_0^2, \\
 A_2 &= (c_1^2 c_2^2 + c_1^2 c_3^2 + c_2^2 c_3^2)k^4 + ((c_1^2 - c_2^2)^2 - s^4)k_x^2 k_y^2 + \omega_0^2 (c_1^2 + c_2^2 - \beta/2)k^2, \\
 A_3 &= \omega_0^2 c_1^2 (\beta/2 - c_2^2)k^4 + \omega_0^2 [\beta(c_2^2 - c_1^2 + s^2) - (c_1^2 - c_2^2)^2 + s^4]k_x^2 k_y^2 - \\
 &\quad - c_1^2 c_2^2 c_3^2 k^6 + c_3^2 (s^4 - (c_1^2 - c_2^2)^2)k^2 k_x^2 k_y^2,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Если перейти в полярную систему координат $k_x = k \cos \theta$, $k_y = k \sin \theta$, то $k_x^2 k_y^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta$. Следует отметить, что в изотропной среде все коэффициенты при $k_x^2 k_y^2$ обращаются в нуль. Из (11) следует, что в рассматриваемой модели такое возможно при выполнении равенства $c_1^2 - c_2^2 = s^2$. В работе [4] показано, что это равенство справедливо для гексагональной решетки, что говорит об изотропии среды с гексагональной симметрией.

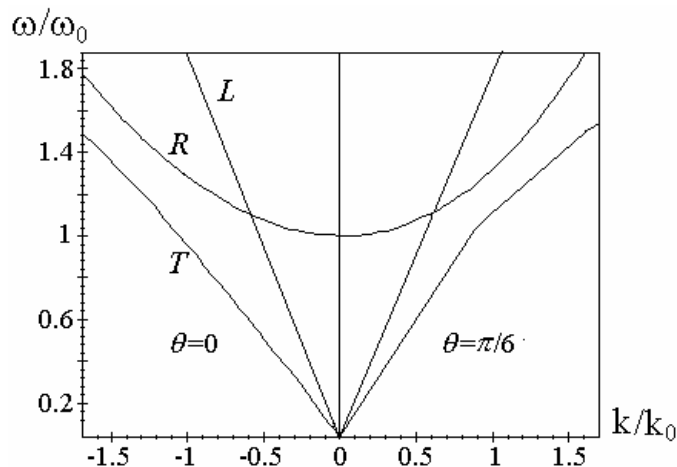


Рис. 3.

Дисперсионные кривые, задаваемые уравнением (10), представлены в нормированном виде (в системе координат $(k/k_0, \omega/\omega_0)$, где $k_0 = \omega_0/c_2$) на рисунке 3. Графики построены для числовых данных, соответствующих кристаллам NaF: $\omega_0 d = 6860$ м/с, $c_1/c_2 = 1.86$, $c_3/c_2 = 0.72$, $\beta/c_2^2 = 0.29$ (см. табл. 1), L – продольная, T – поперечная, R – ротационная моды. В левой полуплоскости рисунка 3 изображены дисперсионные зависимости для волн, распространяющихся вдоль оси x ($\theta = 0$), а в правой полуплоскости – для волн, бегущих под углом $\theta = \pi/6$ к оси x . Из этого рисунка видно, что при распространении волн под углом $\theta = \pi/6$ более ярко выражена дисперсия поперечной моды.

5. Приближение моментной теории упругости

При частотах акустических волн $\omega/\omega_0 < 1$ ротационная волна становится не распространяющейся, и микроповороты частиц среды определяются полем смещений. Связь между микроповоротами φ и смещениями u и w можно найти из линейной части третьего уравнения (5) методом последовательных приближений. В первом приближении

$$\varphi(x, t) \approx \frac{1}{2}(u_y - w_x). \quad (12)$$

Учет соотношения (12) в лагранжиане (4) приводит к “замораживанию” вращательной степени свободы. При этом в среде, как в классической теории, остаются лишь две трансляционные степени свободы, и линейная часть двумерной плотности функции Лагранжа L принимает вид:

$$L = \frac{\rho}{2} \left(u_t^2 + w_t^2 + \frac{R^2}{2} (u_{yt} - w_{xt})^2 \right) - \frac{\rho}{2} \left[c_1^2 (u_x^2 + w_y^2) + c_2^2 (w_x^2 + u_y^2) + \frac{R^2}{4} c_3^2 ((u_{xy} - w_{xx})^2 + (u_{yy} - w_{xy})^2) + s^2 (u_x w_y + u_y w_x) - \frac{\beta}{2} (w_x - u_y)^2 \right]. \quad (13)$$

В отличие от классического случая, в лагранжиан (13) входят слагаемые, содержащие вторые производные от смещений u и w . Слагаемые u_{yt} и w_{xt} учитывают вклад ротационных движений в кинетическую энергию, а члены с пространственными производными u_{xy} , w_{xx} и т.п. описывают вклад в потенциальную энергию напряжений, обусловленных изгибом решетки. Уравнения, описывающие распространение и взаимодействие продольных и поперечных волн в нанокристаллической среде в низкочастотном приближении, имеют вид:

$$u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - \left(c_2^2 - \frac{\beta}{2}\right) u_{yy} - \left(s^2 + \frac{\beta}{2}\right) w_{xy} = -\frac{R^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_y - w_x) - c_3^2 \Delta (u_y - w_x) \right],$$

$$w_{tt} - \left(c_2^2 - \frac{\beta}{2}\right) w_{xx} - c_1^2 w_{yy} - \left(s^2 + \frac{\beta}{2}\right) u_{xy} = \frac{R^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_y - w_x) - c_3^2 \Delta (u_y - w_x) \right]. \quad (14)$$

Здесь символ Δ обозначает лапласиан: $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$.

Уравнения типа (14) принято называть *уравнениями моментной теории упругости*, поскольку слагаемые с пространственными четвертыми производными учитывают моментные напряжения, возникающие при трансляционных смещениях частиц [5]. Из уравнений (14) следует, что в данном низкочастотном приближении скорость поперечной волны уменьшается на величину $\beta/2$, а параметр связи s^2 увеличивается на эту же величину.

Заключение

В статье разработана двумерная нелинейная динамическая модель нанокристаллической среды с квадратной решеткой. Структура полученных уравнений (5) совпадает с уравнениями двумерного континуума Коссера. Отличие заключается в том, что в континууме Коссера коэффициенты, входящие в уравнения движения, определяются эмпирически, а в предложенных моделях они явным образом зависят от размеров частиц и параметров силового взаимодействия между частицами. Найдена аналитическая связь между константами макроупругости среды и параметрами микроструктуры, с помощью которой показано, что в реальных кристаллических средах скорость ротационной волны должна быть меньше скоростей трансляционных волн, а ее критическая частота лежит в гиперзвуковой области. В области низких (звуковых и ультразвуковых) частот можно пренебречь вращательными степенями свободы частиц, и уравнения (5) вырождаются в двумерные классические уравнения Ламе. При этом “память” о микроструктуре среды остается в виде зависимостей между макроскопическими характеристиками среды и параметрами микромоделей.

Литература

1. Chunyu Li, Tsu-Wei Chou, A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes // Int. J. of Solids and Structures. 2003. V.40, pp. 2487–2499.
2. Broberg K.B., The cell model of materials // Computational Mechanics. 1997. V. 19, pp. 447-452.
3. Pavlov I.S., Potapov A.I., and Maugin G.A. A 2D Granular Medium With Rotating Particles // Int. J. of Solids and Structures. 2006. V.43, N 20, pp. 6194-6207.
4. Милосердова И.В., Павлов И.С., Потапов А.И. Двумерная динамическая модель нанокристаллической среды с гексагональной симметрией // Механика композиционных материалов и конструкций, 2006, т.12, N 4, с.555-565.
5. Suiker A.S.J., Metrikine A.V., de Borst R. Comparison of wave propagation characteristics of the Cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models // Int. J. of Solids and Structures. 2001. V. 38. P.1563-1583.
6. Павлов И.С., Потапов А.И. Двумерная модель зернистой среды // Изв. РАН: Механика твердого тела, 2007, № 2, с.110-121.
7. Vasiliev A.A, Dmitriev S.V., Miroshnichenko A.E., Multi-field continuum theory for medium with microscopic rotations // Int. J. of Solids and Structures. 2005. V. 42, pp. 6245-6260.
8. Савин Г.Н., Лукашев А.А., Лыско Е.М. Распространение упругих волн в твердом теле с микроструктурой // Прикладная механика, 1970. Т. 6. № 7. С. 48-52.
9. Федоров В.И. Теория упругих волн в кристаллах. М., Наука, 1965.
10. Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов / Справочник под ред. Францевича И.Н. / Киев, Наукова думка, 1982.

*Нижегородский филиал Института машиноведения РАН,
Россия, г.Нижний Новгород*

Поступила: 02.02.08.