

УДК 621. 833. 1

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЗАЦЕПЛЕНИЯ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

В. К. ПОЛЯКОВ

1. Введение. Изучение трения в зубчатых передачах имеет длительную историю, и в значительной мере связано с трудами известных ученых механиков В. А. Гавриленко, Х. Ф. Кетова, Н. И. Колчина, В. Н. Кудрявцева, Д. Н. Решетова и др. [1-4].

По существу в этих трудах заложены научные основы и созданы практические методы учета сил трения в зацеплениях и опорах зубчатых передач различных типов и назначения. Наряду с развитием теории в этих работах приведены также результаты многочисленных экспериментальных исследований по определению величин мощности сил трения и коэффициентов полезного действия зубчатых передач, на основе которых был получен ряд достаточно простых и точных эмпирических расчетных зависимостей, нашедших широкое применение в машиностроении. [3, 4].

В перечисленных выше работах главным образом определялись интегральные (средние) характеристики трения в зубчатых передачах, такие как мощности сил трения и коэффициенты полезного действия, тогда как анализу закономерностей изменения сил трения между зубьями в процессе зацепления уделялось недостаточное внимание.

В связи с этим в данной статье на примере эвольвентных прямозубых передач с внешним и внутренним зацеплением излагается методика численного моделирования условий работы зубчатой пары с учетом зависимости сил трения от направления скорости скольжения и наличия в данный момент времени двухпарного или однопарного контакта зубьев в процессе зацепления (фазы зацепления).

Выбор численного метода моделирования обусловлен тем, что данный метод дает возможность подробного изучения закономерностей изменения всех сил и моментов в зубчатой паре при задании любых, соответствующих конкретным условиям, характеристик сил трения в зацеплении, а также учета функций распределения нагрузок между зубьями при двухпарном зацеплении. Такой подход позволяет уточнить теоретические расчеты зубчатых передач с учетом трения, а также может служить базой для оценки точности приближенных инженерных расчетных формул.

В ходе исследования приняты допущения об отсутствии погрешностей изготовления и упругих деформаций в зубчатой передаче, а также о малости потерь на трение при перекачивании зубьев. Кроме того, угловые скорости колес и задаваемые моменты сопротивления считаются постоянными.

2. Взаимодействие зубьев при внешнем зацеплении. Будем считать известными все геометрические параметры передачи, составленной из зубча-

тых колес z_1 и z_2 (рис.1), включая коэффициент перекрытия, коэффициенты коррекции и др. [5]. В дальнейшем использованы следующие обозначения: r_{01}, r_{02} - радиусы основных окружностей, φ_1 - текущие значения угла поворота ведущего колеса z_1 , α_s - угол зацепления, L - длина рабочей части линии зацепления, γ_{01} - угол поворота ведущего колеса z_1 во время нахождения в зацеплении одного зуба, γ_{z1} - угловой шаг колеса z_1 .

Известно, что в процессе зацепления точка контакта зубьев M движется по рабочей части линии зацепления L от точки A к точке B в соответствии с законом

$$AM = r_{01}\varphi_1 = \frac{L}{\gamma_{01}}\varphi_1, \quad L = AB. \quad (1)$$

Скорость скольжения зуба колеса z_2 по зубу колеса z_1

$$V_{ск} = (\omega_2 - \omega_1)PM = (\omega_2 - \omega_1)\left(-\frac{L}{\gamma_{01}}\varphi_1 + L_1\right), \quad L_1 = AP. \quad (2)$$

$$\omega_1 > 0, \quad \omega_2 = -\omega_1 \frac{z_1}{z_2}.$$

Значение угловой координаты колеса z_1 при смене направления скорости скольжения находится из (2) при условии, что $V_{не} = 0$

$$\varphi_{10} = \frac{L_1}{L}\gamma_{01}.$$

Если некоторый, выбранный для рассмотрения, зуб входит в зацепление при значении $\varphi_1 = 0$, то в этот момент времени предыдущий зуб занимает положение с угловой координатой $\varphi_1 = \gamma_{z1}$, и также находится в зацеплении. Данная фаза соответствует двухпарному зацеплению, и длится она до тех пор, пока выбранный зуб не займет положение, определяемое угловой координатой: $\varphi_1 = \gamma_{01} - \gamma_{z1}$. В фазе двухпарного зацепления в общем случае следует учитывать, что оба зуба нагружены неодинаково. [6]. В конце фазы двухпарного зацепления предыдущий зуб выходит из зацепления.

Далее в зацеплении участвует только одна пара зубьев. По характеру расположения сил трения при однопарном зацеплении необходимо различать две фазы. В первой из них скорость скольжения рассматриваемого зуба имеет тот же знак, что и при двухпарном зацеплении. Этой фазе соответствуют углы поворота ведущего колеса: $\gamma_{01} - \gamma_{z1} \leq \varphi_1 < \varphi_{10}$, где φ_{10} - угловая координата ведущего колеса, соответствующая контакту зубьев в полюсе зацепления. Во второй фазе однопарного зацепления, когда $\varphi_{10} \leq \varphi_1 < \gamma_{z1}$, скорость скольжения и, следовательно, направления сил трения меняют знак на противоположный.

Наконец, когда выбранный зуб достигнет положения $\varphi_1 = \gamma_{Z1}$, то в зацепление войдет последующий зуб, и зацепление снова станет двухпарным. В дальнейшем данная последовательность смены фаз зацепления зубьев повторяется с периодом, соответствующим угловому шагу колеса z_1 .

Учитывая описанную выше схему зацепления, рассмотрим условия равновесия колес зубчатой передачи с учетом сил трения в зацеплении и опорах.

Будем считать, что к ведомому колесу приложен момент сопротивления M_2 , направленный против угловой скорости ω_2 . В точках контакта зубьев будут действовать нормальные усилия Q , направленные по линии зацепления и силы трения $F_{O?}$, направленные перпендикулярно к линии зацепления. Направления сил трения определяются в соответствии с направлениями относительных скоростей скольжения зубьев. (Рис.1).

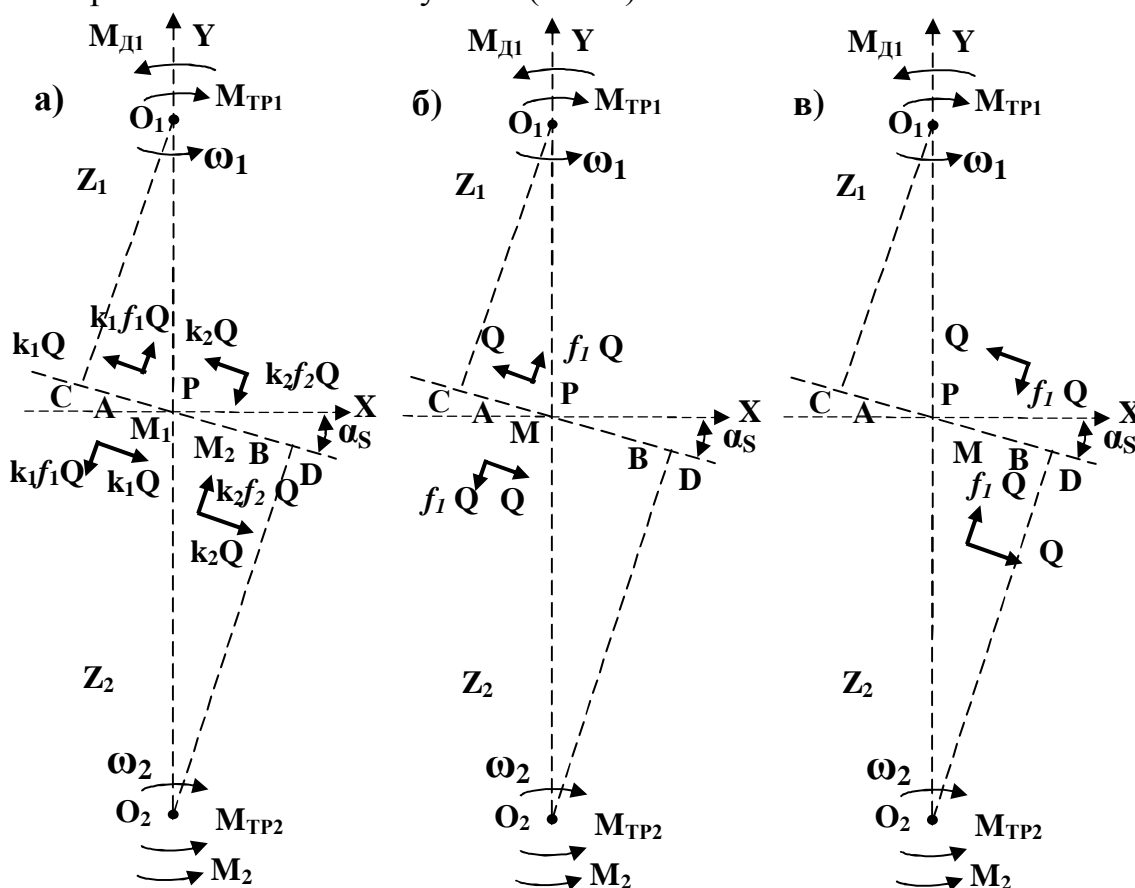


Рис.1. Распределение сил и моментов в различных фазах контакта зубьев при внешнем зацеплении

Рассмотрим сначала фазу Φ_1 двухпарного зацепления, которой соответствует условие: $0 \leq \varphi_1 < \gamma_{O1} - \gamma_{Z1}$. (Рис.1а).

Учтем характер распределения нагрузки между двумя парами зубьев в соответствии с [6], где рекомендуется считать, что, начиная с момента входа зуба в зацепление его коэффициент загрузки возрастает, тогда как коэффици-

ент загрузки предыдущего зуба падает. Принимая линейный характер изменения коэффициентов загрузки, запишем

$$k_1 = a + \frac{b}{\gamma_{01} - \gamma_{z1}} \varphi_1, \quad k_2 = 1 - k_1, \quad (a \approx 0,40, \quad b \approx 0,20).$$

Силы трения скольжения в контакте зубьев зависят от многих факторов и в общем случае обычно представляются зависимостью вида: $F_{O?} = F(f, Q, V_{ne})$, конкретный вид которой устанавливается экспериментально. [3]. Ниже, в качестве примера, использована зависимость, основанная на законе Кулона, в котором коэффициент трения f считается зависящим от скорости скольжения V_{ne}

$$F_{O?} = f \left(1 + \mu \frac{|V_{ne}|}{V_{n?}} \right) Q, \quad (3)$$

где $V_{n?}$ - средняя величина абсолютных значений скоростей скольжения, μ - постоянный коэффициент, с помощью знака которого задается характер зависимости коэффициента трения от скорости скольжения.

Используя равенство (3) для двухпарного зацепления найдем

$$F_{O?1} = k_1 f \left(1 + \mu \frac{|V_{ne}(\varphi_1)|}{V_{n?}} \right) Q = k_1 f_1 Q, \quad (4)$$

$$F_{O?2} = k_2 f \left(1 + \mu \frac{|V_{ne}(\varphi_1 + \gamma_{z1})|}{V_{n?}} \right) Q = k_2 f_2 Q.$$

С учетом равенств (2 - 4) уравнения равновесия ведомого колеса z_2 (рис.1а) получим в следующем виде:

$$\begin{aligned} k_1 f_1 Q DM_1 - k_2 f_2 Q DM_2 - Q r_{02} + M_2 + M_{O?2} &= 0, \\ Q \cos \alpha_s - k_1 f_1 Q \sin \alpha_s + k_2 f_2 Q \sin \alpha_s + R_{02}^x &= 0, \\ -Q \sin \alpha_s - k_1 f_1 Q \cos \alpha_s + k_2 f_2 Q \cos \alpha_s + R_{02}^y &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$R_{02} = Q \sqrt{1 + (k_1 f_1 - k_2 f_2)^2}.$$

Здесь в соответствии с равенством (1)

$$DM_1 = DA - AM_1 = DA - \frac{L}{\gamma_{01}} \varphi_1, \quad (6)$$

$$DM_2 = DA - AM_2 = DA - \frac{L}{\gamma_{01}} (\varphi_1 + \gamma_{z1}),$$

$$M_{O?2} = 0,5 f_o Q_1 \sqrt{1 + (k_1 f_1 - k_2 f_2)^2} d_{2i}, \quad (7)$$

где f_o - коэффициент трения в опоре, d_{2o} - диаметр вала опоры.

Из уравнений (5) с учетом равенств (6, 7) найдем

$$Q = \frac{M_2}{r_{02} - (k_1 f_1 D M_1 - k_2 f_2 D M_2) - 0,5 f_o \sqrt{1 + (k_1 f_1 - k_2 f_2)^2} d_{2i}}. \quad (8)$$

Используя первое из равенств (5) найдем величину момента от сил трения в зацеплении, действующего на ведомое колесо z_2

$$I_{2Z} = Q (k_1 f_1 D M_1 - k_2 f_2 D M_2). \quad (9)$$

Рассмотрим далее условия равновесия ведущего колеса z_1 . (Рис.1а).

$$\begin{aligned} I_{A1} + k_1 f_1 Q N M_1 - k_2 f_2 Q C M_2 - Q r_{01} + M_{O?1} &= 0, \\ -Q \cos \alpha_S + k_1 f_1 Q \sin \alpha_S - k_2 f_2 Q \sin \alpha_S + R_{01}^x &= 0, \\ -Q \sin \alpha_S + k_1 f_1 Q \cos \alpha_S - k_2 f_2 Q \cos \alpha_S + R_{01}^y &= 0, \\ R_{01} &= Q \sqrt{1 + (k_1 f_1 - k_2 f_2)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь:

$$C M_1 = C A + A M_1 = C A + \frac{L}{\gamma_{01}} \varphi_1, \quad C M_2 = C A + \frac{L}{\gamma_{01}} (\varphi_1 + \gamma_{z1}), \quad (11)$$

$$M_{O?1} = -0,5 f_o Q \sqrt{1 + (k_1 f_1 - k_2 f_2)^2} d_{1i}. \quad (12)$$

Из (10 - 12) найдем величину движущего момента, действующего на колесо z_1

$$\begin{aligned} I_{A1} &= Q [r_{01} - (k_1 f_1 C M_1 - k_2 f_2 C M_2) + \\ &+ 0,5 f_o \sqrt{1 + (k_1 f_1 - k_2 f_2)^2} d_{1o}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Также как и для ведомого колеса выделим вклад сил трения в зацеплении в общий момент сопротивления, действующий на ведущее колесо z_1

$$M_{1Z} = Q (k_1 f_1 C M_1 - k_2 f_2 C M_2). \quad (14)$$

Найдем далее мощность, требуемую для преодоления сил трения между зубьями в фазе двухпарного зацепления, исходя из условия, что данная мощность равна произведению силы трения на скорость скольжения (2):

$$N_Z^V = Q (\omega_2 - \omega_1) [(k_1 f_1 - k_2 f_2) (-\frac{L}{\gamma_{01}} \varphi_1 + L_1) + k_2 f_2 \frac{L}{\gamma_{01}} \gamma_{z1}] \quad (15)$$

Практически более удобно находить мощности сил трения в зацеплении с помощью равенства (16), используя при этом найденные выше моменты сил трения, приведенные к осям зубчатых колес z_1 и z_2 (9, 14)

$$N_Z = M_{1Z} \omega_1 + M_{2Z} \omega_2. \quad (16)$$

Фазы однопарного зацепления рассматриваются в соответствии со схемами, приведенными на рис.1б, 1в, а результирующие формулы могут быть легко получены посредством простых преобразований уравнений и формул, полученных для двухпарного зацепления.

Для фазы однопарного зацепления Ф2 (рис.1б), соответствующей условию $\gamma_{01} - \gamma_{z1} \leq \varphi_1 < \varphi_{10}$, достаточно положить: $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, а для фазы Ф3

(рис.1в), реализуемой при $\varphi_{10} \leq \varphi_1 \leq \gamma_{z1} - k_1 = -1, k_2 = 0$. (Здесь отрицательное значение k_1 связано с различными направлениями сил трения $F_{O?1}$ в фазах зацепления $\Phi 2$ и $\Phi 3$).

Мгновенные значения коэффициентов полезного действия во всех фазах зацепления определяются по формулам

$$\eta_I = \frac{|M_2 \omega_2|}{|M_{A1} \omega_1|}, \quad \eta_{II} = \frac{|M_2 \omega_2|}{|M_2 \omega_2| + |N_{O?}|} \quad (17)$$

Во второй из формул (17) мощность N_{TP} включает в себя потери на трение в зацеплении и опорах и находится она из равенства

$$N_{O?} = N_Z + M_{O?1} \omega_1 + I_{O?2} \omega_2. \quad (18)$$

Полученные выше расчетные формулы позволяют подробно исследовать влияние сил трения в зацеплении и в опорах на характер распределения сил, моментов и мощностей в зубчатой паре.

Изложенный выше алгоритм вычислений был реализован в среде MATLAB. Кроме определения текущих значений всех параметров в программе предусмотрено также нахождение их средних интегральных значений. Для иллюстрации полученных результатов ниже приведены графики изменения нормальных усилий в зацеплении и мощностей трения.

В расчетах использовались следующие исходные данные:

$$z_1=27, z_2=54, m=0,003 \text{ м}, \omega_1 = 100 \text{ н}^{-1}, M_2=1 \text{ нм}, f=0,08, f_o = 0,01.$$

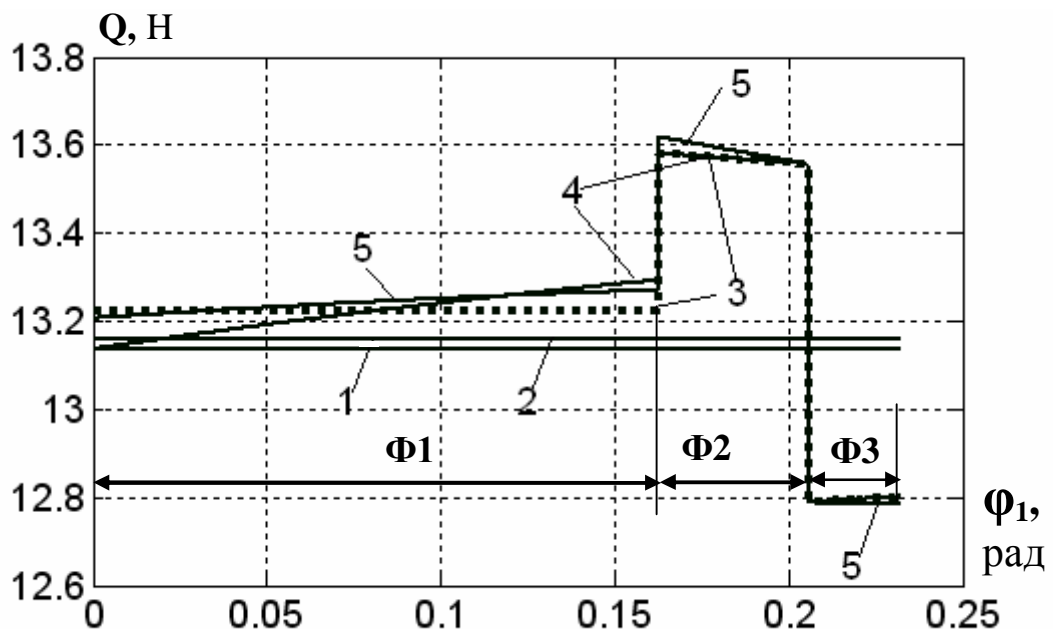


Рис.2. Графики изменения нормальных усилий в зацеплении для различных значений входных параметров

На рис.2 кривые 1 – 5 соответствуют следующим вариантам.

1. $f_1 = f_2 = 0, k_1 = k_2 = 0,5, f_o = 0, \mu = 0,$
2. $f_1 = f_2 = 0, k_1 = k_2 = 0,5, f_o = 0,01, \mu = 0,$

3. $f_1 = f_2 = f, \quad k_1 = k_2 = 0,5, \quad f_o = 0,01, \quad \mu = 0,$
4. $f_1 = f_2 = f, \quad k_1 = 0,4 + \frac{0,2 \varphi_1}{\gamma_{01} - \gamma_{z1}}, \quad k_2 = 1 - k_1, \quad f_o = 0,01, \quad \mu = 0,$
5. $f_1 = f \left[1 + \mu \frac{|V_{ne}(\varphi_1)|}{V_{n?}} \right], \quad f_2 = f \left[1 + \mu \frac{|V_{ne}(\varphi_1 + \gamma_{z1})|}{V_{n?}} \right],$
 $k_1 = 0,4 + \frac{0,2 \varphi_1}{\gamma_{01} - \gamma_{z1}}, \quad k_2 = 1 - k_1, \quad f_o = 0,01, \quad \mu = 0,2.$

Приведенные графики показывают, что основное влияние на характер изменения нормальных усилий оказывают силы трения в зацеплении. При этом в фазе Ф1, где приведено суммарное усилие, действующее на два зуба, проявляются также зависимости нормальных усилий от коэффициентов загрузки и переменности коэффициентов трения. Максимальные значения нормальных усилий наблюдаются при однопарном зацеплении в фазе Ф2, а минимальные в фазе Ф3. Отличительной чертой данных графиков является наличие у них разрывов при смене двухпарного зацепления на однопарное, а также при изменении направления скорости скольжения, что обусловлено принятой характеристикой сил трения.

Наиболее полную информацию о влиянии сил трения дает анализ изменения мощностей трения в процессе зацепления. На рис.3 представлены результаты расчета при исходных данных, соответствующих варианту 5.

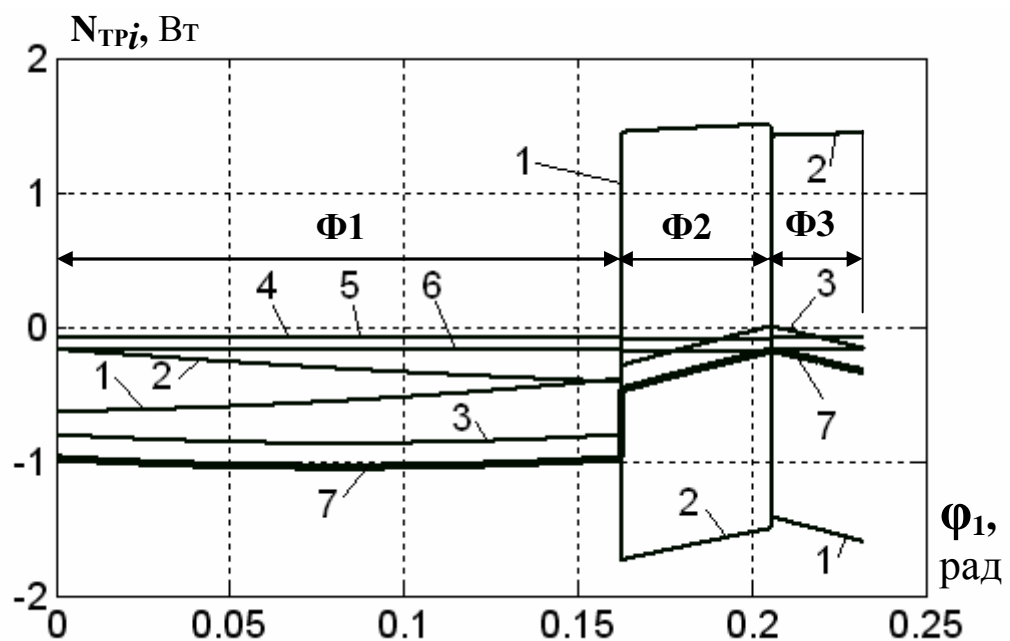


Рис.3. Графики изменения мощностей трения в зубчатой передаче с внешним зацеплением

Мощности, обусловленные моментами сил трения в зацеплении, приведенными к осям зубчатых колес z_1 и z_2 , представлены соответственно гра-

фиками 1 и 2. Данные графики показывают, что силы трения в зацеплении по отношению к зубчатым колесам z_1 и z_2 могут быть не только силами сопротивления, но и движущими. Так эти силы для колеса z_1 являются движущими в фазе Ф2 (мощности положительны), а для колеса z_2 - в фазе Ф3. Общая мощность сил трения в зацеплении (кривая 3) всегда отрицательна и равна нулю в полюсе зацепления. Мощности сил трения в опорах колес z_1 и z_2 (графики 4, 5) и их общая мощность (график 6) всегда отрицательны. Моменты этих сил всегда являются моментами сопротивления. Общие потери мощности на преодоление сил трения в зацеплении и опорах задаются графиком 7.

3. Взаимодействие зубьев при внутреннем зацеплении. Анализ зубчатых передач с внутренним зацеплением производится аналогичным образом. Схема распределения сил в зацеплении для случая, когда ведущим является колесо z_1 с внешними зубьями, представлена на рис.4.

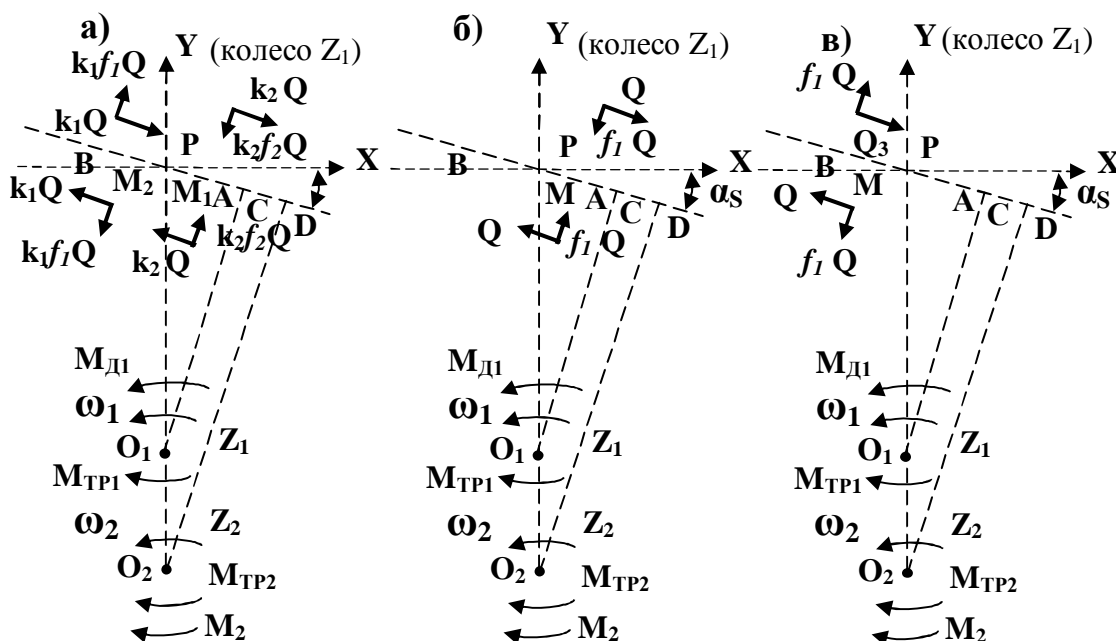


Рис.4. Распределение сил и моментов в различных фазах контакта зубьев при внутреннем зацеплении

Следует отметить, что у передач с внешним и внутренним зацеплением имеются существенные отличия в алгоритме их анализа по изложенной выше методике. Так при анализе передачи с внешним зацеплением в случае смены ведущего колеса достаточно заменить z_2 на z_1 , в то время как смена ведущего колеса в передаче с внутренним зацеплением приводит к изменению схемы расположения сил (рис.4) и необходимости отдельного рассмотрения этого варианта передачи при разработке программного обеспечения.

Для выявления основных особенностей передачи с внутренним зацеплением рассмотрим графики изменения мощностей трения (рис.5), аналогичные приведенным выше графикам (рис.3) для внешнего зацепления.

Из сравнения данных рисунков видно, что длительность фазы двухпарного контакта зубьев $\Phi 1$ для внутреннего зацепления значительно больше соответствующей фазы для внешнего зацепления. При этом в случае внешнего зацепления в фазе $\Phi 1$ моменты от сил трения в зацеплении, приведенные к колесам z_1 и z_2 , являются моментами сопротивления, тогда как при внутреннем зацеплении момент, приведенный к ведомому колесу z_2 , является движущим. Кроме того, при внутреннем зацеплении с ведущим колесом z_1 с внешними зубьями длительность фазы $\Phi 3$, а при ведущем колесе z_2 с внутренними зубьями длительность фазы $\Phi 2$ составляют доли процента от общей длительности периодов зацепления γ_{z1} и γ_{z2} , и не увеличивают потерь мощности на трение.

Эти факторы, а также существенно меньшие величины скоростей скольжения у передач с внутренним зацеплением уменьшают в них потери на трение (графики 7 на рис.3 и 5) и увеличивают коэффициент полезного действия.

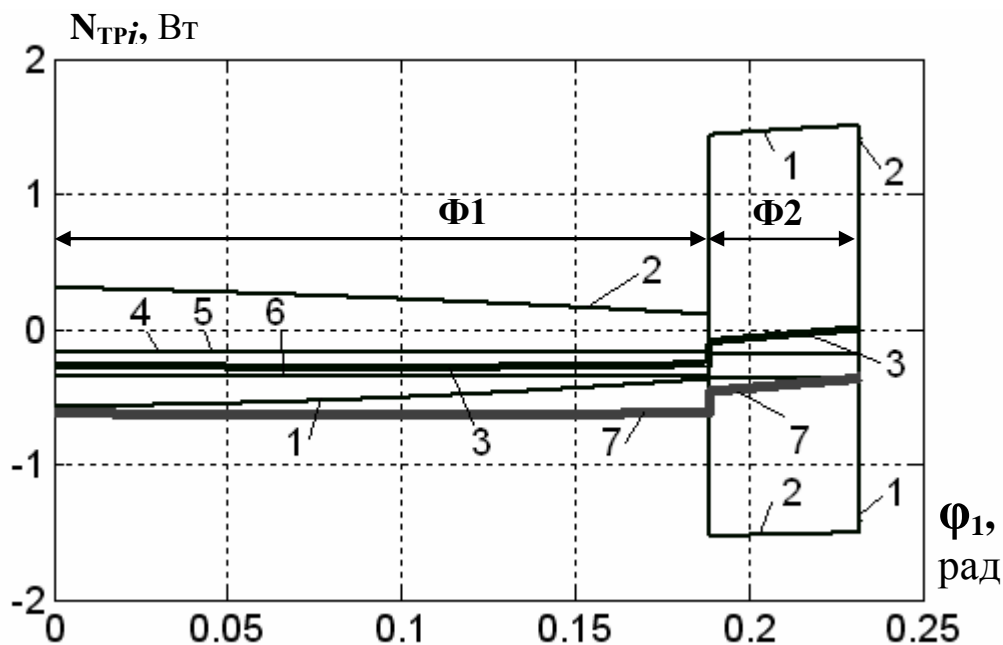


Рис.5. Графики изменения мощностей трения в зубчатой передаче с внутренним зацеплением

Важно также обратить внимание то, что в передачах с внешним зацеплением преобладающий вклад в общие потери мощности вносят потери на трение в зацеплении, тогда как в передачах с внутренним зацеплением - потери на трение в опорах.

4. Заключение. Разработанные алгоритмы и программное обеспечение дают возможность детального изучения влияния трения на силовые характе-
Научно-технический журнал «ВНТР» №2, 2008 г. Национальная Технологическая Группа
В.К. Поляков

ристики рядовых зубчатых передач. При этом создаются предпосылки для учета сил трения и коэффициентов загрузки зубьев в виде, наиболее полно соответствующем реальным условиям.

Проведенный анализ показывает, что при учете трения зависимости сил и моментов в зубчатых передачах являются нелинейными функциями, зависящими от угловой координаты ведущего колеса и текущих значений коэффициентов трения между зубьями и в опорах. При этом характер нелинейности определяется не только видом сил трения, но и, главным образом, изменением параметров зацепления при переходе от двухпарного контакта зубьев к однопарному.

Подробный анализ сил и моментов трения позволяет выявить все особенности зацепления конкретных зубчатых пар, однако, необходимо учитывать, что в многоступенчатых передачах фазы работы каждой пары колес являются случайными величинами, зависящими от условий их изготовления и монтажа (например, от расположения шпонок относительно вершин и впадин зубьев). При этом общий период изменения всех изучаемых параметров может быть достаточно длительным.

В связи с данными соображениями представляется целесообразным учет сил трения в зубчатых передачах и их опорах производить для каждой пары зубчатых передач с помощью средних (интегральных) значений всех входящих в расчетную схему параметров. Во многих случаях эти значения могут быть найдены аналитически, но в общем случае следует ориентироваться на использование рассмотренной выше численной модели процесса зацепления.

Наконец, остановимся на наиболее важных направлениях дальнейшего использования полученных результатов.

В первую очередь это применение разработанных алгоритмов и программного обеспечения в качестве основы для исследования характеристик трения в планетарных передачах, что требует развития и некоторой модификации предложенной выше численной модели. Это направление является важным, так как существующие расчетные методики ориентированы большей частью на анализ конкретных схем планетарных передач.

Далее представляет интерес изучение возможностей использования разработанной модели в качестве составной части динамической модели зубчатой пары с учетом упругих свойств зубьев для теоретического анализа влияния трения на динамические характеристики зубчатой передачи. При этом появляется возможность сопоставления результатов детального учета трения в соответствии с фазами зацепления и учета только средних значений всех параметров, что важно для разработки практических методов исследования динамических систем, содержащих зубчатые передачи.

Список литературы

1. Гавриленко В. А. Зубчатые передачи в машиностроении. – М.: Машгиз, 1962, 531 с.
2. Кетов Х. Ф., Колчин Н. И. Теория машин и механизмов. – М.,Л Машгиз, 1939, 600 с.
3. Кудрявцев В. Н. Планетарные передачи. – Л.: Машиностроение, 1966, 305 с.
4. Решетов Д. Н. Детали машин. – М.: Машиностроение, 1989, 497 с.
5. Анурьев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя. В 3 т. – Т. 2. – М.: Машиностроение, 2001, 912 с.
6. Иосилевич Г. Б. Детали машин. – М.: Машиностроение, 1988, 368 с.

Работа выполнена при поддержке ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 г.)»