

УДК 621.01:534.1

К АНАЛИЗУ ДИНАМИЧЕСКИХ ОШИБОК ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ ПОВЫШЕННОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

И.И. ВУЛЬФСОН

Исследуются колебания длинных исполнительных органов цикловых машин, схематизированных в виде системы с распределенными параметрами при кинематическом возбуждении и изменяющихся граничных условиях. Получены функции, описывающие характер распределения виброускорений вдоль оси исполнительного органа. Установлены способы снижения динамических ошибок, возникающих при некоторых типовых возмущениях, и условия динамической устойчивости на конечном интервале кинематического цикла.

Предварительные замечания. Во многих технологических машинах рабочие органы установлены на валах или стержнях, совершающих заданное неравномерное программное движение. На это движение накладываются нежелательные колебания, вызванные кинематическим возмущением, причем, как показывает анализ, особенно значительные динамические ошибки возникают из-за виброускорений [1,2].

Данная статья посвящена исследованию распространения виброускорений вдоль оси длинных односвязанных систем с распределенными параметрами и установлению способов снижения динамических ошибок, возникающих при некоторых типовых кинематических возмущениях.

Динамическая модель. Представленная на рис.1 динамическая модель состоит из двух упругодиссипативных элементов, разделенных элементом, имитирующим функцию положения выходного звена циклового механизма $\varphi_1 = \Pi(\varphi)$ [1,2] и исполнительного органа, схематизированного в виде диска и вала с моментами инерции J_1 и J_2 . Примем следующие условные обозначения: ω , $\varphi = \omega t$ – угловая скорость и координата входного звена; c_0 , c_1 – коэффициенты жесткости; ψ_0 , ψ_1 – коэффициенты рассеяния; G – модуль сдвига; I – полярный момент инерции.

Используя условия энергетического баланса, приведем упругодиссипативные характеристики c_0 , ψ_0 к оси исполнительного органа. При этом примем $d\Pi/d\varphi = r \sin \varphi$, что соответствует распространенному случаю программного движения выходного звена. Тогда приведенные коэффициенты жесткости и рассеяния определяются как

$$c = c_1(1 + \xi \sin^2 \varphi)^{-1}; \quad \psi = (\psi_0 c_1 / c_0 + \psi_1)(1 + \xi \sin^2 \varphi)^{-1}, \quad (1)$$

где $\xi = r^2 c_1 / c_0$.

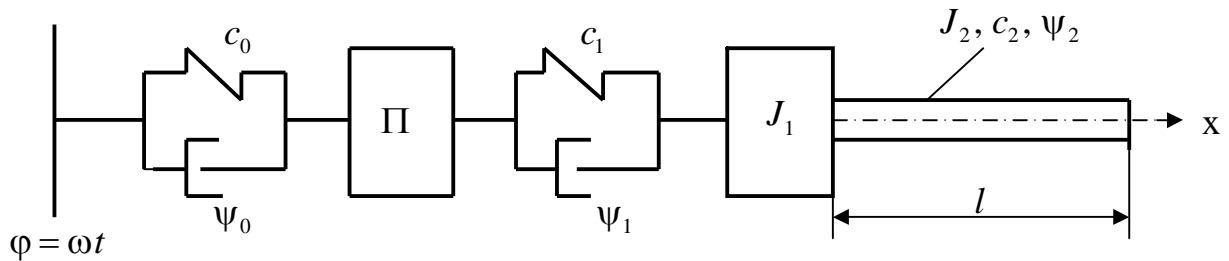


Рис.1

Дифференциальное уравнение колебаний исполнительного органа в координатной системе $\varphi_1 = \Pi(\varphi)$ имеет вид

$$GI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b \frac{\partial u}{\partial t} = \rho \omega^2 \frac{d^2 \Pi}{d\varphi^2} - M(x, t), \quad (2)$$

где $u = \varphi_2(x, t) - \Pi(\varphi)$ – динамическая ошибка в сечении x ; $\rho = J_2 / l$ – погонный момент инерции; b – эквивалентный коэффициент линейной силы сопротивления (см. ниже); $M(x, t)$ – интенсивность распределенного внешнего момента.

Согласно (1) приведенные упругодиссипативные характеристики передаточного механизма являются функциями «медленного» времени $\tau = \varphi / \omega$. При этом граничные условия определяются следующим образом:

$$GI \frac{\partial u}{\partial x}(0) = c(\tau)u(0) + b(\tau) \frac{\partial u}{\partial t}(0) + J_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0); \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l) = 0. \quad (3)$$

Частотный и модальный анализ. Принимая во внимание пренебрежимо малое влияние сил сопротивления на собственные частоты и формы колебаний, на этом этапе примем $b \equiv 0$. Согласно методу условного осциллятора решение однородного дифференциального уравнения, полученного из (1) при обращении в нуль правой части, ищем в форме

$$u = X(x, \tau) \cos \Phi(t), \quad (4)$$

где τ – медленное время.

В одном из сечений (например, при $x = l$) функции $X(l, \tau)$ и Φ могут быть связаны дополнительным условием [2]

$$2 \frac{dB}{d\tau} p + B \frac{dp}{d\tau} = 0, \quad (5)$$

где $p(\tau) = d\Phi / dt$ – «собственная» частота; $B = X(l, \tau)$.

На основании (2)÷(5) формальное частотное уравнение может быть записано в виде

$$\theta(\tau)[\theta(\tau) + \mu \operatorname{tg} \theta(\tau)] = \sigma_0^2(1 + \xi \sin^2 \omega\tau)^{-1}, \quad (6)$$

где $\mu = \rho l / J_1$; $\sigma_0 = k_1 / k_2$; $k_1 = \sqrt{c_1 / J_1}$; $k_2 = \sqrt{GI / (J_2 l)}$.

Уравнение (6) имеет неограниченное множество корней $\theta_r(\tau)$ ($r = \overline{1, \infty}$), которым соответствуют «собственные» частоты

$$p_r(\tau) = k_2 \theta_r(\tau).$$

Если принять $B = 1$ при $\tau = 0$, то нестационарная форма колебаний определяется следующей зависимостью:

$$X_r(x, \tau) = \sqrt{\frac{\theta_r(0)}{\theta_r(\tau)}} \cos[\theta_r(\tau)(1 - x/l)]. \quad (7)$$

На рис.2,а приведены графики безразмерной частоты $\theta_r(\varphi)$ при $\xi = 1$; $\sigma_0 = 1$; $r = 1, 2$; $\mu = 0, 25$ (сплошная линия), $\mu = 1$ (штриховая линия), $\mu = 2$ (штрих пунктирная линия). Как следует из графиков, переменность приведенного коэффициента жесткости практически проявляется лишь на низшей частоте. На рис.2,б показано влияние параметров μ и σ_0 для экстремальных значений θ , т.е. при $\varphi = 0$ (сплошная линия) и $\varphi = \pi/2$ (штриховая линия). Из графиков следует, что низшая частота с ростом μ и возрастает при увеличении σ_0 .

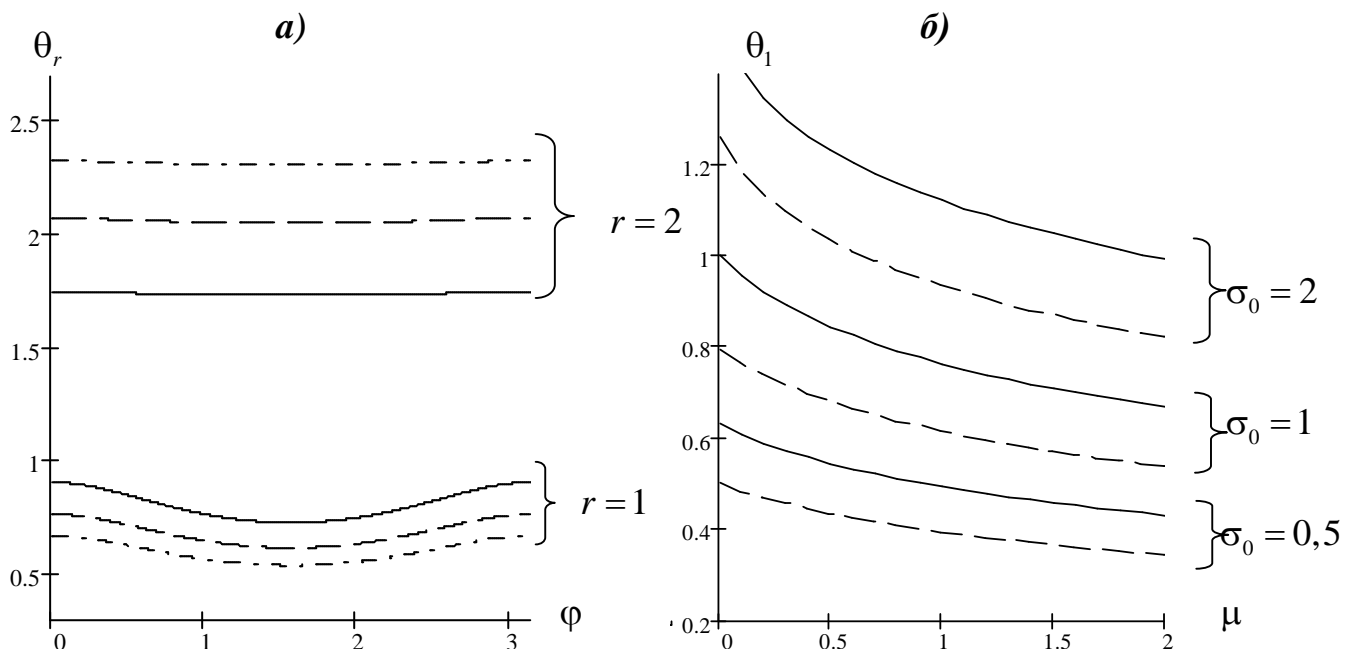


Рис.2

Эволюция форм колебаний для $\xi=1$, $\varphi=\pi/2$ при варьировании параметрами μ и σ_0 показана на рис.3. При этом сплошная линия отвечает $\mu=0,5$, $\sigma_0=1$, штриховая – $\mu=3$, $\sigma_0=1$, штрих пунктирная – $\mu=1$, $\sigma_0=0,5$, пунктирная – $\mu=1$, $\sigma_0=2$.

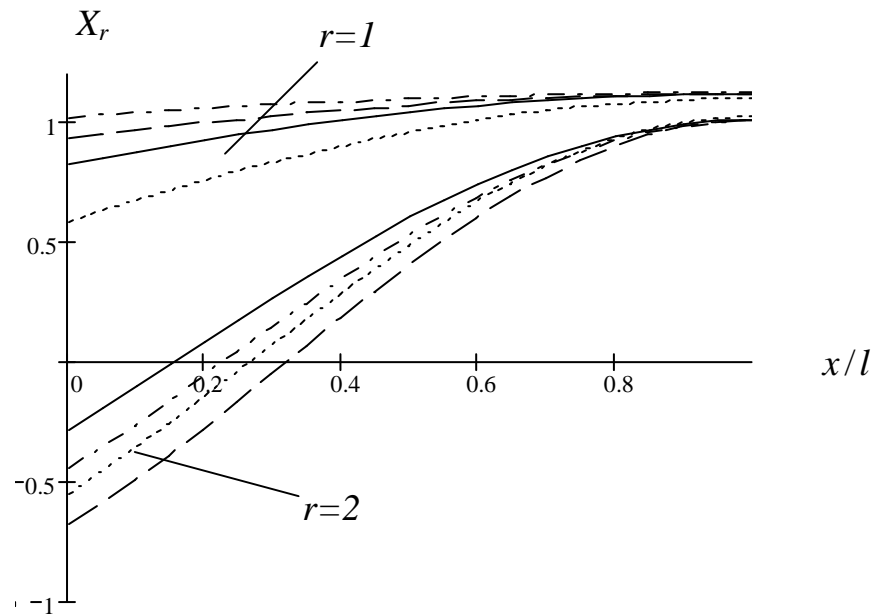


Рис.3

Анализ динамических ошибок. Используя аппарат квазинормальных координат, представим решение неоднородного дифференциального уравнения (2) как

$$u = \sum_{r=1}^{\infty} X_r(x, \tau) U_r(t), \quad (7)$$

где функция U_r определяется из следующего дифференциального уравнения:

$$\ddot{U}_r + 2n_r(\tau)\dot{U}_r + p_r^2(\tau)U_r = W_r(t). \quad (8)$$

В левую часть этого уравнения включен опущенный при частотном анализе диссипативный член, для определения которого можно воспользоваться следующей зависимостью, полученной при исключении диссипативных связей между различными формами колебаний [1]:

$$\psi_r^*(\tau) = \frac{c(\tau)l\psi(\tau) + GID_r(\tau)\psi_r}{c(\tau)l + GID_r(\tau)}, \quad (9)$$

где $D_r = l^{-1} \int_0^l X_r'^2(x, \tau) dx = 0,5\theta_r(\tau)[\theta_r(\tau) - 0,5 \sin 2\theta_r(\tau)]$;

ψ, ψ_r – коэффициенты рассеяния соответственно для обеих рассматриваемых подсистем; ψ_r^* – приведенный к форме r коэффициент рассеяния. При этом $n_r(\tau) \approx \psi_r^*(\tau) p_r(\tau)/(4\pi)$.

Правая часть дифференциального уравнения (8) может быть найдена как

$$W_r = -w_*(t) \int_0^l X_r dx / \int_0^l X_r^2 dx = -w_*(t) H_r(\tau), \quad (10)$$

где

$$H_r(\tau) = \frac{2 \sin \theta_r(\tau)}{\theta_r(\tau) + 0,5 \sin 2\theta_r(\tau)}. \quad (11)$$

На основании метода условного осциллятора частное решение уравнения (8) при медленном изменении коэффициентов имеет вид

$$U_r = \frac{1}{\sqrt{p_r(t)}} \int_0^t \frac{W_r(z)}{\sqrt{p_r(z)}} \exp[-\int_z^t n_r(\xi) d\xi] \sin[\int_z^t p_r(\xi) d\xi] dz. \quad (12)$$

Для инженерных оценок представляет интерес функция $\ddot{u}_{\max}(x/l)$, характеризующая распределение дополнительных ускорений вдоль оси x . Следует отметить, что при реальных значениях параметров именно виброускорения, вызванные резкими изменениями ускорений программного движения $d^2\varphi_1/dt^2$, являются источником повышенной виброактивности, лимитирующим эксплуатационные характеристики машин.

Как показывает анализ, осуществленный на основании приведенных зависимостей, при изменении заданного программного ускорения от 0 до w_{\max} за время Δt

$$\ddot{u}_{\max} = w_{\max} \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r(v_r) H_r X_r, \quad (13)$$

где $v_r = \Delta t/T_r$; $T_r = 2\pi/\bar{p}_r$; \bar{p}_r – усредненное значение $p_r(\tau)$ на интервале $[0, \Delta t]$, w_{\max} – максимальное значение $|w(t)|$.

При линейном законе изменения $w_*(t)$ имеем

$$\kappa_r = |\sin \pi v_r| / (\pi v_r). \quad (14)$$

При изменении $w_*(t)$ по синусоидальному закону (1/4 периода)

$$\kappa_r = \frac{\sqrt{1 + 16v_r^2 - 8v_r \sin 2\pi v_r}}{|1 - 16v_r^2|}. \quad (15)$$

При $w(t) = 0,5w_{\max} [1 - \cos(\pi t / \Delta t)]$

$$\kappa_r = |\cos \pi v_r / (1 - 4v_r^2)|. \quad (16)$$

Поскольку при принятом нормировании форм $X_r(l) = 1$, из зависимости (13) следует, что сумма $K = \sum_{r=1}^{\infty} \kappa_r |H_r|$ может служить критерием для оценки уровня динамической ошибки по виброускорениям. Слагаемые этой суммы $K_r = \kappa_r |H_r|$ характеризуют распределение ускорений по различным формам колебаний. Наиболее существенный вклад вносит член K_1 .

Можно показать, что $v_r = \Delta\varphi_1 k_2 \bar{\theta}_r / (2\pi\omega\sigma_0)$, где $\Delta\varphi$ – угол поворота главного вала, отвечающий изменению $w(t)$ между экстремумами, $\bar{\theta}$ – среднее значение θ . При малых значениях v_r критерий K_1 мало отличается от единицы. Следовательно, $\ddot{i}_{\max} \approx w_{*\max}$, что отвечает так называемому мягкому удару. С ростом параметра θ , пропорционального «собственной» частоте, этот критерий резко убывает. Интересно, что при некоторых малых значениях v_1 критерий имеет максимум, превышающий по величине единицу. Это, однако, не означает, что максимальное дополнительное ускорение \ddot{i}_{\max} , возникающее от единичного скачка $w_*(t)$ может стать больше $w_{*\max}$, так как критерий K_1 характеризует лишь составляющую, отвечающую первой форме, которая при суммировании по формуле (13) компенсируется за счет остальных форм.

При формировании критерия K обычно следующим по значимости является член K_3 . Относительно малое влияние членов, отвечающих четным формам, связано с близостью к антисимметричной форме колебаний, для которой интегральное по длине l значение элементарной работы от заданной симметричной нагрузки относительно мало.

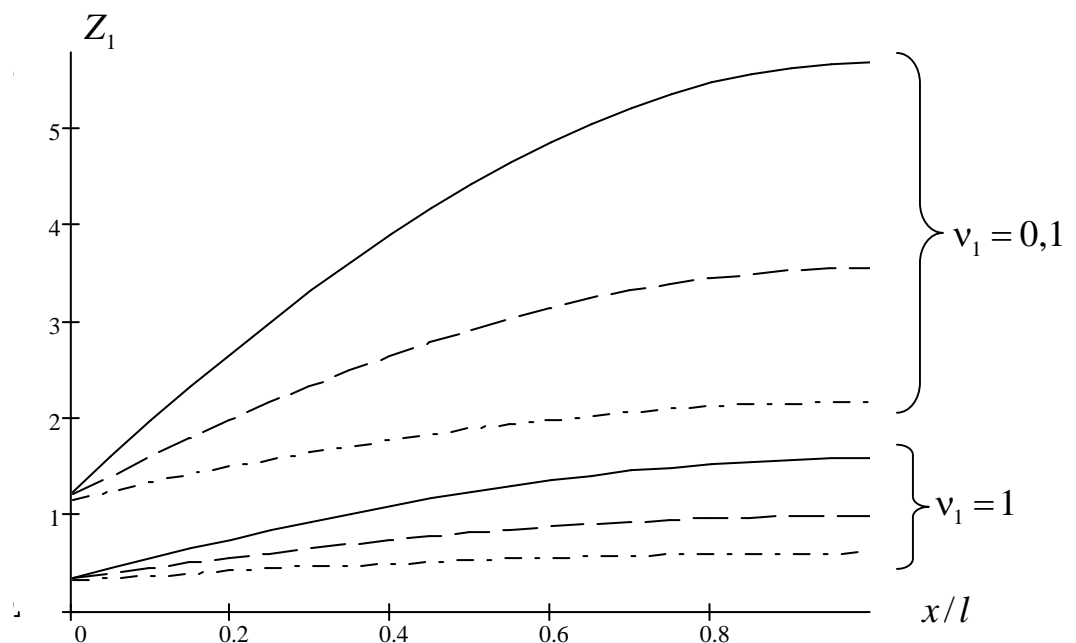


Рис.4

Для анализа характера распределения виброускорений по оси x введем в рассмотрение функцию

$$Z_1 = K_1(v)X_1(x/l)/X_1(0), \quad (17)$$

которая отвечает низшей форме колебаний. На рис.4 приведены графики этой функции, полученные на основании формулы (15) при $\xi=1$, $\mu=1$ для двух значений $v_1=0,1$ и $v_1=1$. При этом сплошные линии соответствуют $\sigma_0=4$, штриховые – $\sigma_0=3$, штрих пунктирные – $\sigma_0=2$. Как следует из графиков, с уменьшением параметра σ_0 ускорения более равномерно распределяются по длине исполнительного органа.

Для контроля за уровнем виброактивности определим нагрузку, передаваемую на привод.

$$c(\tau)u(0,t) = c(\tau) \sum_{r=1}^{\infty} X_r(0,\tau)U_r(t). \quad (18)$$

Критерием оценки каждого из слагаемых суммы (17) следует

$$N_r = |X_r(0,\tau)U_r|_{\max}. \quad (19)$$

Анализ этого критерия свидетельствует, что удовлетворение условий $v_1 \geq 3 \div 4$ также представляется целесообразным и с позиций снижения виброактивности системы. Рассмотрение других законов изменения ускорений программного движения приводит к аналогичным выводам.

Условие динамической устойчивости на конечном отрезке кинематического цикла. Как было показано выше, основным источником виброактивности служат сопровождающие свободные колебания, возникающие при квазиимпульсном кинематическом возбуждении. В системе с постоянными параметрами колебания, возникающие от каждого импульса, являются затухающими. При переменных параметрах возможно чередование участков нарастания и уменьшения амплитуд, что связано с нарушением условий динамической устойчивости на конечном отрезке времени. При этом имеет место своеобразная амплитудная модуляция, при которой уровень колебаний может существенно увеличиться [2]. Для определения достаточных условий устойчивости воспользуемся прямым методом Ляпунова применительно к уравнению (8) для низшей частоты ($r=1$). В качестве функции Ляпунова примем

$$V = U_1^2 + \dot{U}_1^2 / p^2(t). \quad (20)$$

Дифференцируя (20) по времени, получаем

$$\dot{V} = 2U_1\dot{U}_1 + \dot{U}_1^2 d(p^{-2})/dt + 2\dot{U}_1\ddot{U}_1 p^{-2}. \quad (21)$$

Согласно второй теореме Ляпунова достаточным условием для асимптотической устойчивости является $\dot{V} < 0$, что при учете (21) и (8) соответствует

$$n_1 > -0,5\dot{p}_1 / p_1. \quad (22)$$

Обобщая это условие, на основании (21), (22) имеем

$$\vartheta_1 > \vartheta_* = \pi \omega k_2^{-1} |\Psi_1(\varphi)| \quad (\text{колебания и виброскорости}), \quad (23)$$

$$\vartheta_1 > \vartheta_* = 3\pi \omega k_2^{-1} |\Psi_1(\varphi)| \quad (\text{виброускорения}). \quad (24)$$

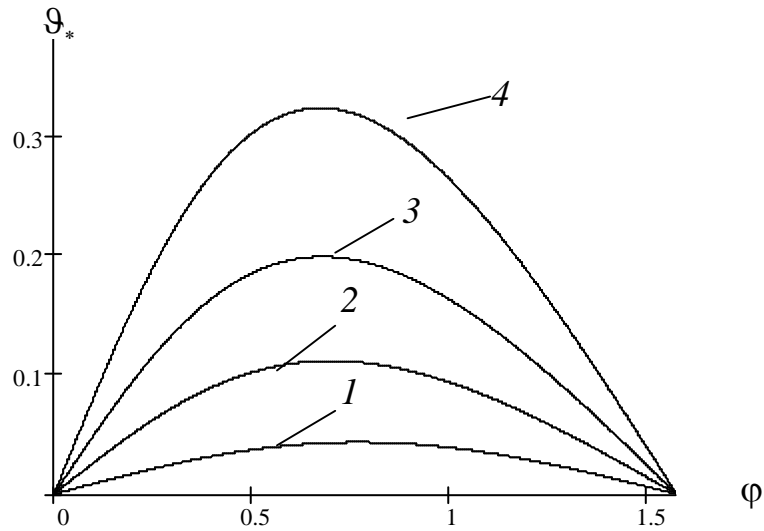


Рис.5

Здесь ϑ_1, ϑ_* – логарифмический декремент и его критическое значение, а функция $\Psi_1(\varphi)$ определяется следующей зависимостью:

$$\Psi_1(\varphi) = \theta_1^{-2} d\theta_1 / d\varphi. \quad (25)$$

Как показывает анализ, условия (24), устанавливающие устойчивость по виброускорениям, оказывается определяющим.

На рис.5 приведены графики ϑ_* , полученные на основании (24), (25) при $\xi = 1, \mu = 1, k_2 / \omega = 15, \sigma_0 = 0,5$ (кривая 1), $\sigma_0 = 1$ (кривая 2), $\sigma_0 = 2$ (кривая 3), $\sigma_0 = 4$ (кривая 4). При реальных соотношениях параметров для сохранения устойчивости на любом временном отрезке кинематического цикла среднее значение низшей «собственной частоты должно, по крайней мере, на порядок превосходить угловую скорость входного звена.

Литература

1. Вульфсон И.И. Динамические расчеты цикловых механизмов. Л.: Машиностроение, 1976. – 328 с.
2. Вульфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.: Машиностроение, 1990. 309 с.