УДК 534

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ В СИЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИ ВОЗМУЩЕННОМ МАЯТНИКЕ

© Владимир Шепселевич Бурд
Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия
vburd1@gmail.com

Аннотация Рассматриваются сильные периодические возмущения маятника. Возмущение представляет собой быстро осциллирующую фукцию с нулевым средним значением и большой амплитудой. Это уравнение используется как модель Джозефских контактов в теории сверхпроводимости. Задача существования вращательных режимов возмущенного маятника исследуется с помощью метод усреднения на бесконечном интервале.

Ключевые слова: маятниковое уравнение, периодическое возмущение, метод усреднения, вращательные режимы, функции Бесселя.

Rotary regimes in strongle periodically perturbed pendulum

V.Sh. Burd

Demidov Yaroslavl state university

Abstract
The strongly periodically perturbed pendulum is considered. Perturbation is a rapidly oscillating periodic function with zero mean value and large amplitude. This equation is used as a model for Josephson junction in the theory of superconductivity. Problem of the existence of rotary solutions for perturbed pendulum is investigated. Method of averaging on infinite interval is applied.

Key words: pendulum equation, periodic perturbation, method of averaging, rotary solutions, Bessel functions.

1. Введение

Возмущенный маятник исследовался во многих статьях (см.например, [1]).

Возмущенный маятник является важной моделью в нелинейной динамике. Маятниковое уравнение часто используется как модель для контакта Джозефсона в теории сверхпроводимости.

В этой статье прадполагается что вынужденная сила является быстро осциллирующей с большой амплитудой.

Мы введем малый параметр ε и сделаем акуратные предположения об асимптотическом поведении амплитуды и частотыа вынужденной силы.

Классический метод усреднения применяется для построения усредненных уравнений [2,3,4].

2. Возмущенный простой маятник

Мы начинаем с уравнения возмущенного простого маятника

$$\ddot{x} + \sin x = \frac{M}{\varepsilon^2} f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right). \tag{1}$$

Здесь ε малый параметр, $f(t)$ периодическая функция с периодом $2\pi/\Omega$ и нулевым средним значением.

Мы будем искать решения уравнения (1), близкие к быстрым вращениям в виде

$$x = y + \gamma\frac{t}{\varepsilon} + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{2}$$

где $\ddot{F}(t) = f(t)$, γ - постоянная. Мы подставим (2) в уравнение (1). Уравнение (1) примет форму

$$\ddot{y} + \sin\left[y + \gamma\frac{t}{\varepsilon} + MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right] = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) может быть записано в виде

$$\ddot{y} + A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin y + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\cos y = 0, \tag{4}$$

где

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left[\gamma\frac{t}{\varepsilon} + \left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right], \quad B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left[\gamma\frac{t}{\varepsilon} + \left(MF\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right)\right].$$

В уравнении (4) перейдем к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$. Получим уравнение

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \varepsilon^2[A(\tau)\sin y + B(\tau)\cos y] = 0. \tag{5}$$

Чтобы усреднить уравнение (5) перейдем к эквивалентной системе двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{d\tau} &= \varepsilon z, \\ \tfrac{dz}{d\tau} &= -\varepsilon[A(\tau)\sin y + B(\tau)\cos y]. \end{aligned} \tag{6}$$

Правые части системы (6) пропорциональны малому параметру ε. Это стандартная форма для применения метода усреднения.

Будем обозначать через $\langle g(t)\rangle$ среднее значение периодической или почти периодической функции $g(t)$. Усредним систему (6). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}}{d\tau} &= \varepsilon \bar{z}, \\ \frac{d\bar{z}}{d\tau} &= -\varepsilon[\langle A(\tau)\rangle \sin \bar{y} + \langle B(\tau)\rangle \cos \bar{y}]. \end{aligned} \tag{7}$$

Эта система записывается, как одно уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \varepsilon^2[\langle A(\tau)\rangle \sin \bar{y} + \langle B(\tau)\rangle \cos \bar{y}] = 0.$$

Во времени t усредненное уравнение имеет форму

$$\frac{d^2\bar{y}}{dt^2} + [\langle A(\tau)\rangle \sin \bar{y} + \langle B(\tau)\rangle \cos \bar{y}] = 0.$$

Мы рассмотрим маятниковое уравнение, которое представляет интерес для теории сверхпроводимости (см.[5]).

$$\ddot{x} + \varepsilon\alpha\dot{x} + \sin x = \frac{M}{\varepsilon^2} \sin\left(\frac{\Omega t}{\varepsilon}\right) + \eta, \tag{8}$$

где α - коэффициент затухания, η -постояннкя

Мы сделаем замену переменных в уравнении (8)

$$x = y + \gamma\frac{t}{\varepsilon} + G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

где функция $G(t)$ - решение уравнения

$$\ddot{G} + \varepsilon\alpha\dot{G} = \frac{M}{\varepsilon^2} \sin\left(\frac{\Omega t}{\varepsilon}\right).$$

Получим уравнение

$$\ddot{y} + \varepsilon\alpha\dot{y} + \alpha\gamma + \sin\left(y + \gamma\frac{t}{\varepsilon} + G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right) = 0.$$

Это уравнение может быть записано как

$$\ddot{y} + \varepsilon\alpha\dot{y} + \alpha\gamma + A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \sin y + B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \cos y = 0 \tag{9}$$

где

$$A\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \cos\left[\gamma\frac{t}{\varepsilon} + G(\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right], \quad B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = \sin\left[\gamma\frac{t}{\varepsilon} + G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right].$$

В уравнении (9) перейдем к быстрому времени $\tau = t/\varepsilon$. Получим уравнение

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \varepsilon^2\alpha\frac{dy}{d\tau} + \varepsilon^2\alpha\gamma + \varepsilon^2[A(\tau)\sin y + B(\tau)\cos y] = 0. \tag{10}$$

От уравнения (10) перейдем к системе уравнений

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{d\tau} = \varepsilon z, \\ \frac{dz}{d\tau} = -\varepsilon\varepsilon(\alpha\gamma + [A(\tau)\sin y + B(\tau)\cos y] + \eta) - \varepsilon^2\alpha z. \end{array} \tag{11}$$

Правые части системы (11) пропорциональны малому параметру ε. Это стандартная форма для применения метода усреднения.

Усредним систему (11). Согласно методу Боголюбова, выполним замену переменных

$$\begin{array}{l} y = \xi + \varepsilon u_1(\tau,\xi,\eta) + \varepsilon^2 u_2(\tau,\xi,\eta). \\ z = \eta + \varepsilon V_1(\tau,\xi,eta) + \varepsilon^2 v_2(\tau,\xi,\eta). \end{array},$$

Здесь функции $u_i(\tau,\xi,\eta), v_i(\tau,\xi,\eta)(i = 1,2)$ - периодические по τ с периодом $2\pi/\Omega$ и имеют нулевое среднее значение. Система (11) преобразуется в в систему

$$\begin{array}{l} \frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon A_1(\xi,\eta) + \varepsilon^2 A_2(\xi,\eta), \\ \frac{d\eta}{d\tau} = B_1(\xi,\eta) + \varepsilon^2 B_2(\xi,\eta) \end{array}$$

Чтобы найти функции $A_i(\xi,\eta)$ $B_i(\xi,\eta)$ $u_i(\tau,\xi,\eta)$ $v_i(\tau,\xi,\eta)$ получим следующую систему уравнений

$$\begin{array}{l} A_1 + \frac{\partial u_1}{\partial\tau} = \eta, \\ B_1 + \frac{\partial u_1}{\partial\tau} = -\alpha\gamma - [\langle A(\tau)\rangle\sin\xi + \langle B(\tau)\rangle\cos\xi]). \end{array} \tag{12}$$

$$\begin{array}{l} A_2 + \frac{\partial u_2}{\partial\tau} = v_2 \\ B_2 + \frac{\partial v_1}{\partial\xi}A_1 + = \frac{\partial v_1}{\partial\eta}B_1 + \frac{\partial v_2}{\partial\tau} = \alpha\eta. \end{array} \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) получим

$$\begin{array}{l} A_1 = \eta, \quad u_1 = 0, \quad A_2 = 0 \\ B_1 = -\alpha\gamma - [\langle A(\tau)\rangle\sin\xi + \langle B(\tau)\rangle\cos\xi], \quad B_2 = -\alpha\eta. \end{array} \tag{14}$$

Из формул (14) полчим систему усредненных уравнений

$$\begin{array}{l} \frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon\eta, \\ \frac{d\eta}{d\tau} = -\varepsilon(\alpha\gamma + [\langle A(\tau)\rangle\sin\xi + \langle B(\tau)\rangle\cos\xi]) + \varepsilon\eta + \varepsilon^2\alpha\eta. \end{array} \tag{15}$$

В качестве примера возьмем функцию

$$f(t) = \sin\Omega t.$$

Функция $G(t)$ определяется из уравнения

$$\ddot{G} + \varepsilon\alpha\dot{G}(t) = \frac{M}{\varepsilon^2}\sin\frac{\Omega t}{\varepsilon}.$$

Легко видеть, что

$$G(t) = -\frac{M}{\Omega^2 + \alpha^2\varepsilon^4}\sin\frac{\Omega t}{\varepsilon} + O(\varepsilon^2).$$

Из хорошо известных формул теории функций Бесселя следует, что функции

$$A(\tau) = \cos\gamma\tau\cos G(\tau) - \sin\gamma\tau\sin G(\tau)$$

и

$$B(\tau) = \sin\gamma\tau\cos G(\tau) + \cos\gamma\tau\sin G(\tau).$$

определяются формулами

$$A(\tau) = \cos\gamma\tau\left[J_0(\Gamma) + 2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(\Gamma)\cos 2k\Omega\tau\right] - \sin\gamma\tau\left[2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(\Gamma)\sin(2k+1)\Omega\right],$$

$$B(\tau) = \sin\gamma\tau\left[J_0(\Gamma) + 2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(\Gamma)\cos 2k\Omega\tau\right] + \cos\gamma\tau\left[2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(\Gamma)\sin(2k+1)\Omega\tau\right],$$

где

$$\Gamma = -\frac{M}{\Omega^2 + \alpha^2\varepsilon^4}.$$

и $J_k(z)$ - функция Бесселя порядка k. Если отношение

$$\frac{\gamma}{\Omega} = k, \tag{16}$$

где k - целое число, тогда среднее значение функции $A(\tau)$ не равно нулю и имеет вид $\langle A(\tau)\rangle = J_{2k}(\Gamma)$ при $\gamma = 2k\Omega$ и $\langle A(\tau)\rangle = -J_{2k+1}(\Gamma)$ приr $\gamma = (2k+1)\Omega$. В этом случае среднее значение функции $B(\tau)$ равно нулю. Если (13) не выполняется,то средние значения функций $A(\tau)$, $B(\tau)$ равны нулю. Усредненные уравнения при целом k во времени τ имеют форму

$$\begin{aligned} \tfrac{d\xi}{d\tau} &= \varepsilon\eta, \\ \tfrac{d\eta}{d\tau} &= -\varepsilon(\alpha\gamma + -J_{2k}(\Gamma)\sin\xi - \eta), \end{aligned} \tag{17}$$

или

$$\begin{aligned} \tfrac{d\xi}{d\tau} &= \varepsilon\eta, \\ \tfrac{d\eta}{d\tau} &= -\varepsilon(\alpha\gamma - J_{2k+1}(\Gamma)\sin\xi - \eta). \end{aligned} \tag{18}$$

Стационарные решения уравнения (17) определяются из уравнений

$$\eta_0 = 0, \quad -\alpha\gamma + J_{2k}(\Gamma)\sin\xi_0 = 0.$$

Решение второго уравнения существует, если выполняется неравнство

$$\sin\xi = \frac{\alpha\gamma}{J_{2k}(\Gamma)} < 1 \tag{19}$$

При условиях (19), получим два решения

$$0 < \xi^1 < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \xi^2 < \pi.$$

Матрица линеаризованной на стационарном решении ξ^1 имеет вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ J_{2k}(\Gamma)\cos\xi^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $J_{2k}(\Gamma) > 0$. Для ξ^1 одно собственное значение матрицы A_0 положительно, а другое отрицательно. Осюда следет из теоремы об усреднении на бесконечном интервале, что для достаточно малых ε, уравнение (17) имеет при достаточно малых ε решение

$$\xi^1(\tau) = \xi^1 + \varepsilon f(t,\varepsilon),$$

где $f(t,\varepsilon)$ - периодическая по t функция и это решение неустойчиво.

Для стациокарного решенияп xi^2 собственные значения A_0 чисто мнимые. В этом случае необходимо исследовать уравнения второго приближения. Эти уравнения имеют вид

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \varepsilon\eta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = -\varepsilon(-\alpha\gamma + J_{2k\Gamma}\sin\xi - \varepsilon^2\alpha\eta. \tag{20}$$

В этом случае линеаризованная на решении ξ_2 матрица имеет два собственных значения с отрицательной вещественной частью. Отсюда и из теоремы об усреднении следует, что уравнение (17) при достаточно малых ε имеет асиптотически устойчивое периодическое решение. Аналогично исследуется уравнение (18).

Литература

1. Miles J. Directly forced oscillation of inverted pendulum, Phys. Lett. A 133, 295 (1988).
2. Боголюбов Н.Н. , Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М: Наука, 1974.
3. В.Ш. Бурд Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колеьаний, Ярославль: ЯрГУ, 2013.
4. В.Ш. Бурд, В.Л. Крупенин Усреднение в квазиконсервативных системах. Библиотека ВНТР. М.: "Белый Ветер 2016. 172 с. Маятниковые и
5. A. Barone and G. Paterno, Physics and Aplication of Djosephon effect, John Wiley (1982).

Дата поступления статьи: 10 марта 2017 года.