

УДК 534.11

## ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ

© Владислав Львович Литвинов, Валерий Николаевич Анисимов

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Самарский государственный технический университет"

СамГТУ, Самара, Россия

[vladlitvinov@rambler.ru](mailto:vladlitvinov@rambler.ru), [anisimov170159@mail.ru](mailto:anisimov170159@mail.ru)

**Аннотация.** Используя метод Канторовича - Галеркина находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях вязкоупругой балки с движущейся границей, лежащей на упругом основании. Зависимость силы сопротивления движению балки принимается пропорциональной ее скорости. Учитывается изгибная жесткость балки. Приводятся результаты, полученные для амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -ной динамической моде. Исследуется явление установившегося резонанса и прохождения через резонанс. Решение получено для наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на движущейся границе.

**Ключевые слова:** колебания систем с движущимися границами, изгибная жесткость, вязкоупругость, упругое основание, сопротивление среды, резонансные свойства, амплитуда колебаний.

## TRANSVERSE VIBRATIONS VISCOELASTIC BEAM VARIABLE LENGTH ON AN ELASTIC FOUNDATION WITH CONSIDERING THE INFLUENCE OF THE RESISTANCE FORCES ENVIRONMENTAL

© Vladislav L. Litvinov, Valeriy N. Anisimov

Samara State Technical University, Samara, Russia

**Abstract.** Using of Kantorovich - Galerkin method is an approximate solution of the problem of transverse vibrations of viscoelastic beam with a moving boundary, lying on an elastic base. The dependence of the resistance force of the beam is taken proportional to its speed. Take into account the flexural rigidity of the beam. The results obtained for the amplitude of the vibrations corresponding to the  $n$ -th dynamic mode. Investigation the phenomenon of resonance and steady passage through resonance. The solution is obtained for the most common case in practice when external disturbances acting on the moving boundary.

**Key words:** fluctuations in systems with moving boundaries, the flexural rigidity, viscoelastic properties, elastic base, environmental resistance, resonance properties, oscillation amplitude.

Одномерные колебательные системы, границы которых движутся, широко распространены в технике: изгибные колебания валов, балок и стержней с подвижными закреплениями [1, 5–7, 9, 13, 16–17].

Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств. Результатами такого анализа могут стать: повышение надежности работы технических объектов с переменными во времени границами, повышение точности расчетов конструкций на динамическую прочность. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании

таких систем. Точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями [7, 8]. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича – Галеркина, описанный в работах [1–3, 14] и метод решения интегро–дифференциального уравнения, описывающего колебаний механических систем с движущимися границами [4, 18]. Метод Канторовича – Галеркина позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления среды [10, 13], изгибную жесткость [13], вязкоупругие свойства колеблющегося объекта [16], а также жесткость подложки [6].

Рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс для поперечных колебаний балки переменной длины на подпружиненной подложке, с учетом вязкоупругости и действия демпфирующих сил.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания балки, имеет вид [5, 6, 15]:

$$\frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x, t) + \frac{\mu I}{\rho} U_{xxxx}(x, t) + U_{tt}(x, t) + \frac{\lambda}{\rho} U_t(x, t) + \frac{k_0}{\rho} U(x, t) = 0. \quad (1)$$

Граничные условия:

$$U(0, t) = 0; U_x(0, t) = 0; \quad (2)$$

$$U(l_0(t), t) = B \cos W_0(\omega_0 t); U_x(l_0(t), t) = 0. \quad (3)$$

Начальные условия не оказывают влияние на резонансные свойства линейных систем, поэтому в данной задаче они не рассматриваются [1, 17].

В (1) - (3) используются следующие обозначения:

$U(x, t)$  - поперечное смещение точки балки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $E$  – модуль упругости материала балки;  $I$  - осевой момент инерции сечения балки;  $\mu$  - коэффициент, характеризующий вязкоупругость объекта;  $\lambda$  - сила сопротивления среды, действующая на единицу длины балки при единичной скорости поперечного движения;  $\rho$  - линейная плотность массы балки;  $k_0$  - жесткость подложки;  $l_0(t) = L_0 - v_0 t$  - закон движения правой границы;  $L_0$  – начальная длина балки;  $v_0$  – скорость движения границы;  $W_0(z)$  - функция класса  $C^2$ ;  $B, \omega_0$  - постоянные величины (в случае действия гармонического возмущения  $\omega_0$  является частотой этого возмущения).

Если ввести в задачу (1) - (3) безразмерные переменные:

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}} x; \gamma^2 = \frac{EI}{\rho}; \tau = \omega_0 t + \varphi_0; \varphi_0 = \frac{\sqrt{\omega_0 \gamma}}{v_0} - \frac{\omega_0 L_0}{v_0}; U(x, t) = Bu(\xi, \tau)$$

и новую функцию  $u(\xi, \tau) = e^{-\alpha \tau} V(\xi, \tau)$ , где  $\alpha = \lambda / (2\omega_0 \rho)$ ,

то исходная задача примет вид:

$$(1 - \varepsilon_1 \alpha) V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \varepsilon_1 V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi, \tau) + V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \beta^2 V(\xi, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$V(0, \tau) = 0; V_\xi(0, \tau) = 0; \quad (5)$$

$$V(l(\varepsilon\tau), \tau) = e^{\alpha\tau} \cos W(\tau); V_\xi(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (6)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{E} \omega_0; \beta^2 = \alpha^2 - \eta; \eta = \frac{k_0}{\rho \omega_0^2};$$

$$l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \varepsilon = -\frac{v_0}{\sqrt{\gamma\omega_0}}; W(\tau) = W_0(\tau - \varphi_0).$$

Для решения задачи (4) - (6) воспользуемся методом Канторовича-Галеркина [1–3]. Решение будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (7)$$

Решая задачу

$$\begin{aligned} X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) &= 0; \\ X_n(0, \varepsilon\tau) &= 0; \quad X_{n\xi}(0, \varepsilon\tau) = 0; \\ X_n(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) &= 0; \quad X_{n\xi}(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

найдем выражения для динамических мод

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0, 62 \left[ C_n(\varepsilon\tau) (\sin(r_n(\varepsilon\tau)\xi) - sh(r_n(\varepsilon\tau)\xi)) + \cos(r_n(\varepsilon\tau)\xi) - ch(r_n(\varepsilon\tau)\xi) \right],$$

где

$$\begin{aligned} C_n(\varepsilon\tau) &= \frac{ch[r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)] - \cos[r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{sh[r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)] - \sin[r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}; \quad r_n(\varepsilon\tau) = \sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \\ \omega_{0n}(\varepsilon\tau) &= \frac{k_n^2}{l^2(\varepsilon\tau)}; \quad k_n \approx \pi n + \pi/2. \end{aligned}$$

Заметим, что динамические моды  $X_n$  определяются с точностью до постоянного множителя. Здесь они выбраны в целях нормирования таким образом, что  $\max\{X_n(\xi, \varepsilon\tau)\} = 1$ .

Подставляя  $n$ -ый член ряда (7) в уравнение (4) с учетом (8) получим:

$$f_n''(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon_1 \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n'(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0, \quad (9)$$

где  $\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = (1 - \varepsilon_1 \alpha) \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \beta^2$ .

Как и в [2–4], функцию  $f_n(\tau)$  будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (9) с функцией  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  на интервале  $[0; l(\varepsilon\tau)]$ . В этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_0^{l(\varepsilon\tau)} [f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)] X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi + \varepsilon_1 A_{n1}(\varepsilon\tau) \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n'(\tau) + \\ + A_{n1}(\varepsilon\tau) \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $A_{n1}(\varepsilon\tau) = \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) d\xi.$

При выводе уравнения (10) учтено, что

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_{n\xi}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = 0.$$

Введем в уравнение (10) новую функцию

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + Q_n(\varepsilon\tau) \cos W(\tau), \quad (11)$$

где

$$Q_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\int_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi}{A_{n1}(\varepsilon\tau)} = \frac{3,24(-1)^n}{k_n}.$$

Тогда уравнение (10) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$  будет иметь вид

$$\mu_n''(\tau) + 2A_n(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = -\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_n(\varepsilon\tau) \cos W(\tau), \quad (12)$$

где

$$A_n(\varepsilon\tau) = \frac{\varepsilon_1 k_n^4}{2 l^4(\varepsilon\tau)}.$$

Второй член правой части равенства (11) слабо влияет на точность, поэтому вместо (7) можно записать:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau).$$

Перейдем к определению функций  $\mu_n(\tau)$ . Введем в уравнение (12) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \frac{1,61}{\sqrt{l(\varepsilon\tau)}} \exp\left[-\int_0^{\tau} A_n(\zeta) d\zeta\right].$$

Тогда с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  уравнение (12) будет иметь вид

$$y_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) Q_n(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)} \cos W(\tau).$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям [2–4] и используя метод малого параметра [11], получим следующее выражение для амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[ \int_0^{\tau} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^{\tau} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{2,59}{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau) l(\varepsilon\tau)} \exp\left(\frac{\varepsilon_1 k_n^4}{3\varepsilon} \left(\frac{1}{(1+\varepsilon\tau)^3} - 1\right) - 2\alpha\tau\right);$$

$$\Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta); \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\zeta.$$

$$F_n(\tau) = \frac{2k_n^3}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)l^7(\varepsilon\tau)}} \exp\left(\frac{\varepsilon_1 k_n^4}{6\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon\tau)^3}\right) + \alpha\tau\right).$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если скорость изменения функции  $\Phi_n(\zeta)$  равна нулю, т.е.:

$$W(\tau) = w_n(\tau) + \gamma_1,$$

где  $\gamma_1$  - постоянная величина.

Амплитуда при этом имеет вид

$$A_n(\tau) = E_n(\varepsilon\tau) \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) d\zeta.$$

Если  $W(\tau) = \tau$ , то в области, содержащей точку  $\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left( k_n^4 \sqrt{\frac{1-\varepsilon_1\alpha}{1+\beta^2}} - 1 \right)$  наблюдается

явление прохождения через резонанс.

Выражение для максимально возможной амплитуды при прохождении через резонанс имеет вид:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\varepsilon\tau_2) \left\{ \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}.$$

На рисунке 1 показаны построенные с помощью разработанного программного комплекса [12] графики зависимости максимальной амплитуды поперечных колебаний балки переменной длины от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  при прохождении через резонанс на первой динамической моде при различных значениях безразмерного коэффициента  $\alpha$ , характеризующего сопротивление среды (сверху вниз:  $\alpha = 0$ ;  $\alpha = 0,01$ ;  $\alpha = 0,05$ ;  $\alpha = 0,1$ ) со следующими параметрами модели (безразмерный коэффициент жесткости объекта  $\gamma = 0,1$ ):

- безразмерные коэффициенты  $\varepsilon_1$  и  $\eta$ , характеризующие вязкоупругость и жесткость подложки, имеют нулевые значения (рисунок 1, а);
- безразмерный коэффициент, характеризующий вязкоупругость  $\varepsilon_1 = 0,02$ , безразмерный коэффициент, характеризующий жесткость подложки  $\eta = 0,02$  (рисунок 1, б).

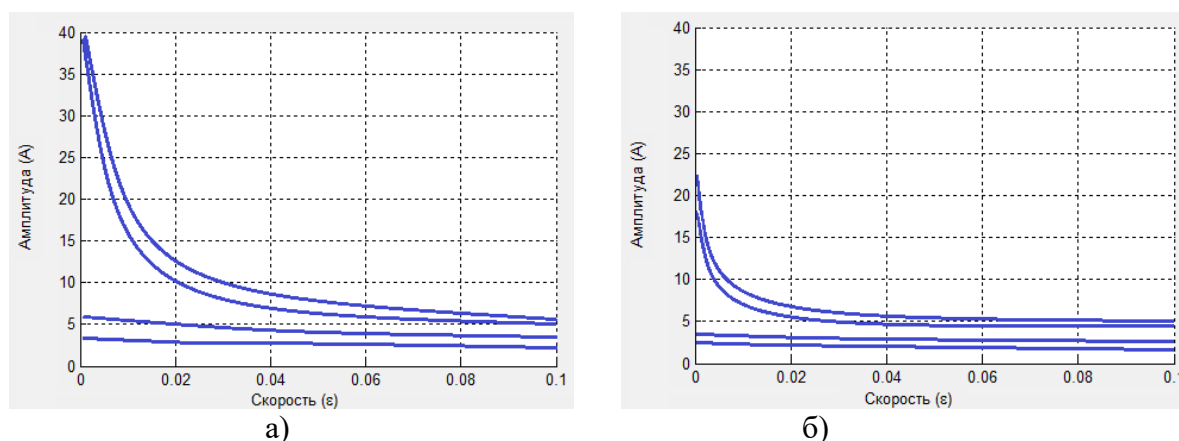


Рис.1. Графики зависимости максимальной амплитуды колебаний балки от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  при различных значениях безразмерных коэффициентов, характеризующих сопротивление среды, вязкоупругость и жесткость подложки

Анализ графиков, изображенных на рисунке 1, показывает, что амплитуда колебаний при нулевых значениях безразмерных коэффициентов, характеризующих сопротивление среды, вязкоупругость и жесткость подложки является оценкой сверху для амплитуд колебаний, в случае, когда соответствующие коэффициенты не равны нулю.

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, колебания в которых описывает задача (1) - (3).

### Список литературы

1. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. – 131 с.
2. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №1(18). – 2009. – С. 149–158.
3. Литвинов В.Л. Решение задач о колебаниях вязкоупругих объектов переменной длины методом Канторовича – Галеркина // Научная мысль. №2, 2016. – С. 37-43.
4. Литвинов В.Л. Об одном решении интегро–дифференциального уравнения колебаний механических систем с движущимися границами // Вестник научно–технического развития. № 8 (96), 2015. – С. 24–30.
5. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л. Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 2 (19) – 2015. – С. 382–397.
6. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». № 1 (37) – 2013. – С. 93–98.
7. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
8. Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 3 (28) – 2012. – С. 145–151.
9. Лежнева А.А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159-161.

10. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №2 (19). – 2009. – С. 147–152.
11. *Литвинов В.Л.* Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 16, № 1. 2014. – С. 83–88
12. *Литвинов В.Л., Яшагин Н.С., Анисимов В.Н.* Свидетельство о регистрации электронного ресурса «Автоматизированный исследовательский комплекс «ТВ–ANALISYS» в ОФЭРНиО № 19517 от 26.09.2013 г. и ФГАНУ ЦИТиС № 130912114653 от 30.09.2013 г.
13. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания балки переменной длины с учетом изгибной жесткости и действия демпфирующих сил // Четвертое российско–армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам: тезисы докладов / отв.ред. Знаменская О.В., Щуплев А.В. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. – С. 42–43.
14. *Динг Ху, Чен Ли-Квун.* Методы Галеркина для собственных частот движущейся в осевом направлении балки // Общие вопросы механики. Общая механика, 2011. №2.
15. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи о колебаниях балки с движущейся границей // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2011.– С. 10–14.
16. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Вынужденные колебания вязкоупругой балки переменной длины // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2013. – С. 17–19.
17. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Резонансная амплитуда колебаний балки переменной длины // Третья международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: Материалы конференции под редакцией чл.–корр. РАН И.В. Воловича и д. ф.–м.н., проф. В.П. Радченко. – Самара: СамГТУ, 2012. – С. 37–38.
18. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.

*Дата поступления статьи: 22 февраля 2017 года.*