

УДК 534.1

ВОЗБУЖДЕНИЕ И ГАШЕНИЕ ФРИКЦИОННЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

©Владимир Константинович Асташев¹, Иосиф Исаакович Вульфсон²¹Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, г. Москва²Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, г. Санкт-Петербург¹v_astashev@mail.ru, ²jvulf@yandex.ru

***Аннотация.** Рассмотрена проблема снижения виброактивности устройства, рабочий орган которого поступательно двигается вдоль направляющей. Приводятся результаты, позволяющие определить значение скорости, ниже которого происходит возникновение фрикционных автоколебательных процессов. Указанное значение возрастает с уменьшением диссипативных характеристик привода. Показано, что высокочастотное возмущение, приводящее к положительному эффекту за счет вибрационной линеаризации сил сухого трения, одновременно вызывает понижение уровня диссипации в приводе. Проводится оптимизация параметров возбуждения. Выводы подтверждаются результатами численного моделирования.*

***Ключевые слова:** автоколебания, характеристики сил трения, фазовые портреты, критическая скорость, энергетический баланс, петля гистерезиса, компьютерное моделирование.*

EXCITATION AND DAMPING THE FRICTION SELF-OSCILLATION PROCESSES

V.K. Astashev¹, I.I. Vulfsan²¹IMASH RAN, Moscow, Russia²St. Petersburg State University of industrial technologies and design, St. Petersburg

***Abstract.** The problem of reducing the vibro-activity of a device whose working body is moving along the guide is considered. The results allowing to determine the value of the speed below which the occurrence of frictional self-oscillatory processes occur are given. This value increases with decreasing drive dissipative characteristics. It is shown that a high-frequency perturbation, which leads to a positive effect due to the vibrational linearization of the forces of dry friction, simultaneously causes a decrease in the level of dissipation in the drive. The excitation parameters are optimized. The conclusions are confirmed by the results of numerical simulation.*

***Keywords:** auto-oscillations, characteristics of frictional forces, phase portraits, critical speed, energy balance, hysteresis loop, computer simulation.*

1. При эксплуатации машин фрикционные автоколебания чаще всего возникают при медленных перемещениях ползунков по направляющим скольжения или при вращении валов с малыми угловыми скоростями. В частности, в металлорежущих станках при перемещении тяжелых узлов вместо требуемого равномерного движения может возникнуть движение с периодическими остановками, исключающими возможность точной подачи инструмента.

Аналогичное явление наблюдается в вытяжных цилиндрах прядильных машин, в которых из-за фрикционных автоколебаний возникает неровнота пряжи и повышается ее обрывность.

Проблеме фрикционных автоколебаний посвящено много исследований, обзор которых здесь не приводится. В развитие этих исследований в данной статье акцентируется внимание на определении пороговых значений скоростей переносного движения, определяющих границу области возбуждения фрикционных автоколебаний, а также на влиянии высокочастотного возбуждения. Обратимся к модели, показанной на рис.1.

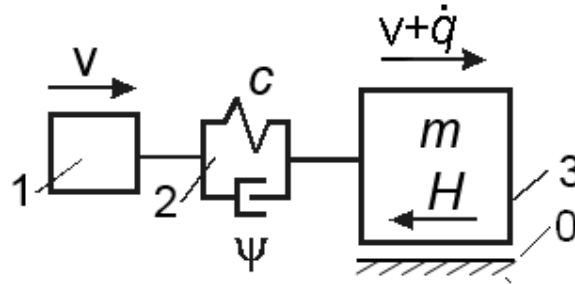


Рис.1

Представим, что от звена 1, перемещающегося с постоянной скоростью $v > 0$, движение через упруго-диссипативный элемент 2 сообщается звену 3 с массой m , к которому приложена сила сухого трения H . При обратном движении, при котором звено 1 остановлено, а основание 0 движется со скоростью v в обратном направлении, рассматриваемая задача была подробно исследована в работе [1], однако без учета ряда весьма важных факторов, представляющих первостепенный интерес для инженерной практики.

Примем упрощенную характеристику силы трения, согласно которой при скольжении сила трения равна $H = H_1$, а при отсутствии скольжения $H = H_0 = \zeta H_1$, где $\zeta = \mu_0 / \mu_1$; μ_0, μ_1 – коэффициенты трения покоя и движения.

Движение элемента 3, имитирующего рабочий орган, в общем случае состоит из двух этапов: этапа скольжения и этапа останова. Этап скольжения описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = -H_1 \quad \text{при } (\dot{x} + v) > 0. \quad (1)$$

Здесь x – координата относительного движения, равная деформации упругого элемента 2; $b = 2\delta\sqrt{cm}$ – коэффициент эквивалентного линейного сопротивления; c – коэффициент жесткости; $\delta = \mathfrak{D} / (2\pi) \approx \psi / (4\pi)$; \mathfrak{D} – логарифмический декремент; ψ – коэффициент рассеяния.

Нарушению приведенного в (1) неравенства отвечает этап останова, при котором $\dot{x} = -v$; $H_{\max} = H_0 = \zeta H_1$.

Далее для упрощения анализа в качестве обобщенной координаты примем $q = x - H_1 / c$, что соответствует отсчету от положения равновесия при $H = H_1$. Кроме того, введем «безразмерное время» $\varphi = kt$, где $k = \sqrt{c/m}$, и параметр $\upsilon = v/k$. При дальнейшем изложении, не сужая общности, примем $k = 1c^{-1}$; при этом численно $\upsilon = v$.

2. Для иллюстрации некоторых характерных динамических режимов сначала воспользуемся результатами компьютерного моделирования (рис.2) уравнения (2) при

следующих начальных условиях: $q_0 = -(H_0 - H_1) / c = -h_1(\zeta - 1)$; $q'_0 = -v$. (Величины параметров выбраны таким образом, чтобы наиболее наглядно выявить влияние исследуемых факторов). Показанные фазовые портреты соответствуют установившимся режимам, которым предшествует переходный режим до реализации условий энергетического баланса (см. ниже). Эти режимы различаются исходной скоростью v звена 1 и коэффициентом диссипации δ , который на данном этапе характеризует энергетические потери в приводе (элемент 2).

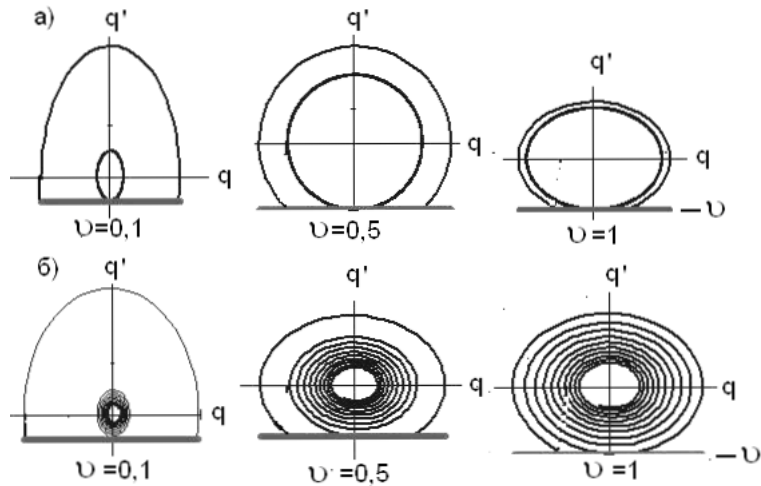


Рис.2

Анализ показанных фазовых портретов позволяет сделать несколько предварительных выводов. Во-первых, при отсутствии диссипативных сил (рис.2,а), как и следовало ожидать, возникают незатухающие колебания, а при их учете колебания после одного или нескольких циклов могут затухать. Заметим, что, если подводимая за период энергия окажется выше отводимой, то возможен и рост амплитуд (см. ниже). Во-вторых, интенсивность наблюдаемых эффектов существенным образом зависит от значения скорости переносного движения v .

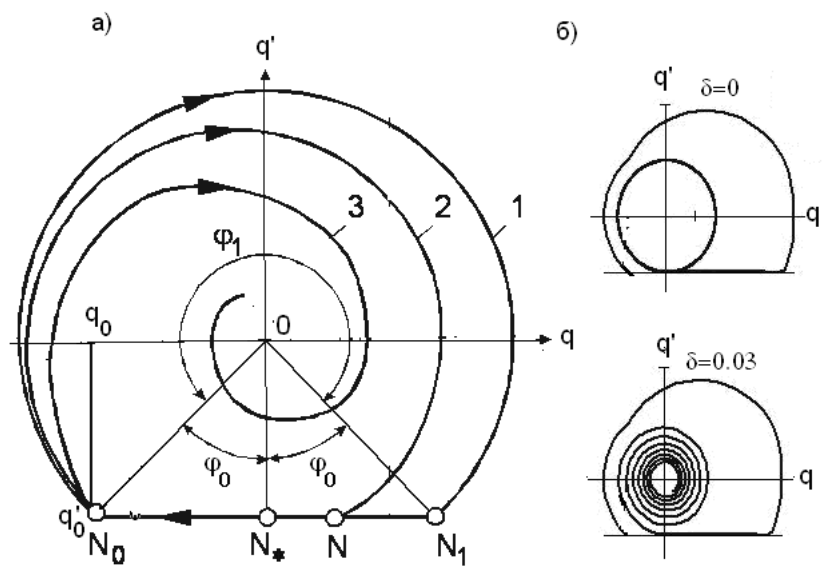


Рис.3

Для более подробного анализа обратимся к рис. 3,а. Вышеприведенным начальным условиям на фазовой плоскости отвечает точка N_0 . Если не учитывать работу, затраченную на преодоление диссипативных сил в упругом элементе 2, то в относительном движении фазовая траектория отображается кривой 1. В точке N_1 сила трения становится равной силе трения покоя H_0 , и происходит останов элемента 3. На участке останова фазовая траектория отображается отрезком $N_1N_0 = 2h_1(\zeta - 1)$, причем $N_0N_* = N_1N_*$. Именно на этом участке потенциальная энергия возрастает до величины $E_0 = H_0^2 / 2c$. При этом накопление потенциальной энергии. $\Delta E_+ = 2H_1(H_0 - H_1) / c = 2ch_1^2(\zeta - 1)$.

При учете диссипативных сил возможны два случая. В первом случае фазовая траектория снизу ограничена прямой N_1N_0 и отображается кривой 2. При этом участок N_1N соответствует потере энергии, а участок NN_0 её накоплению. В точке N имеет место так называемый мягкий удар, возникающий при скачкообразном изменении ускорений. Во втором случае фазовая траектория (кривая 3) не пересекает линию N_1N_0 , что свидетельствует об отсутствии «энергетической подпитки» после первого цикла колебаний.

Большой практический интерес представляет значение критической скорости v^* , выше которой фазовая траектория отображается кривой 3. В дальнейшем при оценке влияния энергетических потерь будем использовать эквивалентный коэффициент диссипации, который учитывает энергетические потери не только в приводе (элемент 2), но и работу, затраченную на преодоление сил трения в режиме скольжения [2,3].

Воспользуемся условиями энергетического баланса. Пусть в окрестности точки N_* фазовая траектория не касается прямой N_0N_1 . При этом доминирующую роль играет изменение потенциальной энергии, поскольку при $v^* \approx v$ изменение кинетической энергии можно принять равным нулю. В рассматриваемом случае $\dot{q} + v > 0$, поэтому скорость в относительном движении сохраняет постоянное направление, а, следовательно, петля гистерезиса при колебаниях не замыкается [2 - 5], и сила сухого трения не влияет на колебательный процесс. Однако при наличии фазы останова происходит замыкание этой петли, и её площадь сокращается по сравнению со случаем $v=0$. Тогда может оказаться, что приток энергии превышает её отток, и амплитуда колебаний возрастет.

Этот эффект особенно четко проявляется при переходных режимах на первых циклах. Дело в том, что в начале движения отсутствует деформация упругого элемента, и следовательно приток энергии ΔE_+^0 существенно выше, чем при установившемся режиме: $\Delta E_+^0 = 0,5H_0^2 / c = 0,5ch_1^2\zeta^2 > \Delta E_+$. Такой случай иллюстрируется на рис. 3,б результатами компьютерного моделирования. На приведенных фазовых портретах наглядно видно, что существенный рост амплитуды на первом цикле вызвал появление участка останова в абсолютном движении, причем при $\delta = 0$ возникает установившийся режим с амплитудой $A \approx |v|$, а при $\delta \neq 0$ колебания затухают.

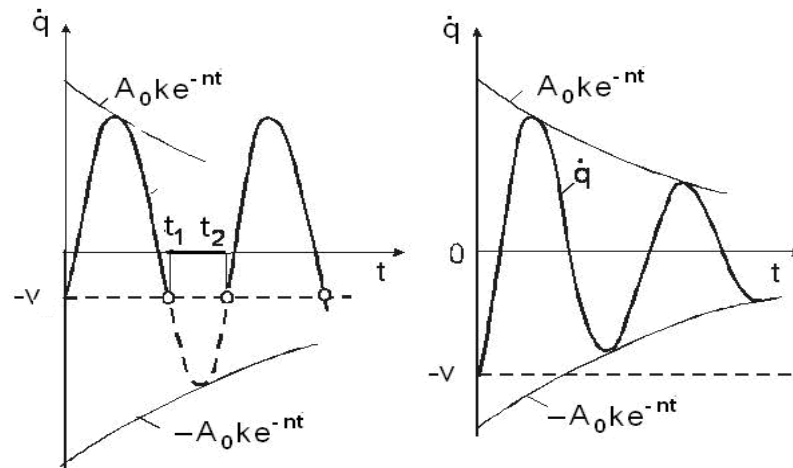


Рис. 4

Установим уровень диссипации, необходимый для сохранения безрывного движения. На рис. 4 показаны два режима колебаний при разрывном (интервал $t \in t_1, t_2$) и неразрывном движении. Здесь $n = \delta_* k = k \vartheta_* / (2\pi)$, где $\psi_* = 1 - \exp(-2\vartheta_*)$ – эквивалентные значения коэффициента рассеяния и логарифмического декремента [2, 3] (подробнее см. ниже). Из вышеизложенного следует, что целесообразно, чтобы завершению процесса позиционирования предшествовал определенный временной интервал затухания колебаний, превышающий, по крайней мере, один или несколько периодов свободных колебаний.

На основании условий энергетического баланса критическое значение скорости v^* определяется зависимостью

$$v^* = v^* k > kh_1(\zeta - 1) \sqrt{\left[\frac{(1 + \zeta)(1 - \psi_*)}{4(1 - \sqrt{1 - \psi_*})} \right]^2 - 1}, \quad (3)$$

Согласно формуле (3) на рис. 5 построен график $v^*(\psi_*)$, устанавливающий связь между пороговыми значениями скоростей и эквивалентным коэффициентом рассеяния.

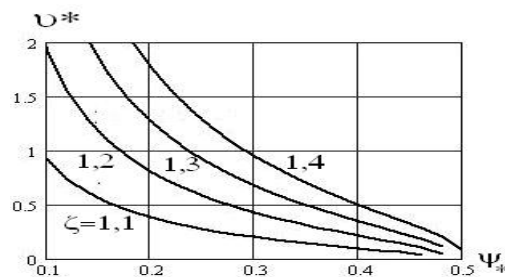


Рис.5

Как уже отмечалось, для определения ψ_* при оценке энергетических потерь должна быть учтена работа, затраченная на преодоление сил трения на участке скольжения звена 3. При определении этой работы с некоторым запасом примем $\varphi_0 = \pi / 2$. Тогда на участке скольжения $\psi_{1*} \approx 4H_1 / (v_0 \sqrt{cm}) + \psi$, а на участке останова $\psi_{2*} \approx \psi$. Здесь ψ , коэффициент рассеяния элемента 2, соответствующий конструкционному демпфированию в

приводе. При $\zeta \rightarrow 1$ имеем $v^* \rightarrow 0$, а при $\psi \rightarrow 0$ разрывное движение возникает на всем диапазоне скоростей ($v^* \rightarrow \infty$). Как следует из анализа графиков, при $\psi_* = 0,5$ имеем $v^* \rightarrow 0$ не зависимо от значения ζ . Это связано с тем, что при $\varphi_0 \rightarrow \pi/2$ и малых значениях скорости $v < h_1(\zeta - 1)$ на участке скольжения $\psi_{1*} \gg \psi$. Тогда верхняя ветвь петли гистерезиса практически превращается в прямую, соответствующую закону Гука, что сокращает площадь петли гистерезиса почти в два раза по сравнению со случаем $\psi_{1*} = \psi_{2*}$. Учитывая условие энергетического баланса, для данного случая имеем $\psi_* = 0,5$. При этом можно воспользоваться следующими оценочными зависимостями [3]:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \pi / k + 2h_1(\zeta - 1) / (vk); \\ \Delta s &= \pi v + 2h_1(\zeta - 1). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь τ – период автоколебаний; Δs – путь, пройденный за один период со скоростью переносного движения. (Этот участок в инженерной практике обычно называют «скачком»).

Как следует из анализа зависимостей (4), период автоколебаний практически определяется временем останова звена 3, когда происходит деформация упругого элемента. Далее масса почти мгновенно «перескакивает» на величину Δs . При этом колебания по существу оказываются разрывными. Как уже отмечалось, податливый привод в данном случае выполняет функцию накопителя энергии и является своеобразным посредником между внешним источником и колебательной системой. По мере приближения v к критическому значению v^* релаксационная форма автоколебаний становится менее выраженной.

3. Предположим, что опорная плоскость или некоторые опорные элементы выходного звена 3 (см. рис.1) совершают относительно этого звена высокочастотные колебания $u^0(t) = a \sin \omega t$ с частотой $\omega \gg k$ и малой амплитудой a . Тогда установившееся относительное движение поверхностей звена 3, контактирующих с направляющей, имеет вид

$$u(t) = vt + u^0(t) = vt + a \sin \omega t, \quad (5)$$

где v - постоянная или медленно меняющаяся скорость звена 3.

Вследствие периодичности рассматриваемого процесса развиваемая в зоне контакта сила трения

$$F(t) = H(\dot{u}(t)) = H_1 \operatorname{sgn} \dot{u}(t) = H_1 \operatorname{sgn}(v + a\omega \cos \omega t) \quad (6)$$

является периодической функцией периода $T = 2\pi / \omega$.

Примем, что из-за несоизмеримости частоты ω и собственной частоты k можно пренебречь колебаниями каретки, вызываемыми периодической составляющей силы (6). Тогда статическая сила P , действующая на ведомое звено 3 со стороны привода, определяется выражением

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T H(t) dt = \frac{H_1}{T} \int_0^T \operatorname{sgn}(v + a\omega \cos \omega t) dt. \quad (7)$$

На рис.6 приведены графики, поясняющие путь вычисления силы (7) и ее физический смысл. Здесь показана характеристика силы трения $H(\dot{u}) = H_1 \operatorname{sgn} \dot{u}$, под которой

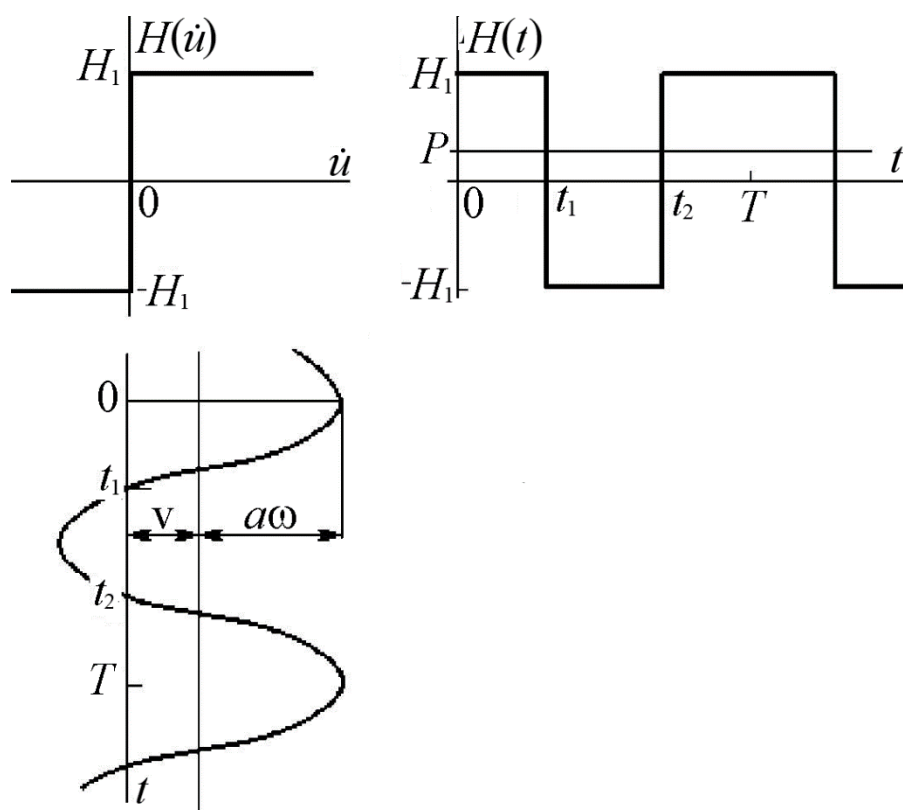


Рис. 6

приведен график скорости $\dot{i}(t) = v + \dot{i}^0(t) = v + a\omega \sin \omega t$. С помощью этих графиков слева построена временная развертка силы трения (6) в зоне контакта. Среднее за период значение этой силы определяет величину силы P , действующей со стороны привода. Интегрированием (7) находим

$$P = \frac{H_1}{\pi} [\pi - (\tau_2 - \tau_1)], \quad (8)$$

где

$$\tau_1 = \omega t_1 = \arccos\left(-\frac{v}{a\omega}\right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{v}{a\omega}, \quad (9)$$

$$\tau_2 = \omega t_2 = 2\pi - \tau_1,$$

t_1, t_2 – моменты перемены знака скорости $\dot{i}(t)$ за период.

После подстановки величин (9) в равенство (8) получим окончательно

$$P = \frac{2H_1}{\pi} \arcsin \frac{v}{a\omega}. \quad (10)$$

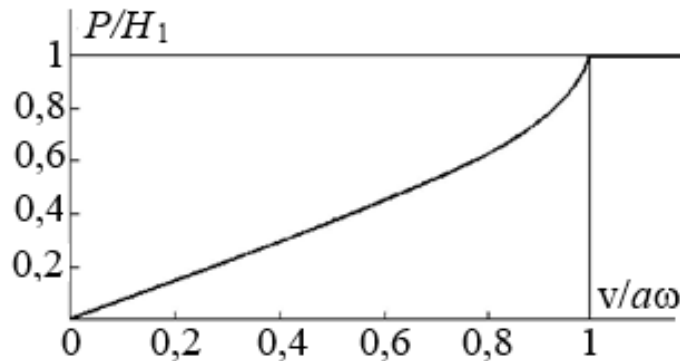


Рис. 7

На рис. 7 по соотношению (10) построена зависимость статической силы P от отношения скоростей $v/a\omega$. Отсюда видно, что при скоростях скольжения $v < a\omega$ вибрация в зоне контакта приводит к уменьшению статической силы, необходимой для преодоления силы трения. При очень малой скорости $v \ll a\omega$ из выражений (9), (10) с точностью до величин первого порядка малости получаем

$$P = \frac{2H_1}{\pi a\omega} v. \quad (11)$$

Таким образом, при малых скоростях v поведение системы в условиях вибрации аналогично ее движению в линейной вязкой среде. В этом проявляется известный эффект вибрационного сглаживания нелинейностей [3–11], неоднократно наблюдавшийся экспериментально [12, 13].

Очевидно, что колебания в зоне контакта при $a\omega > v^*$ могут устранить возможность возбуждения автоколебаний. Однако при этом возникают вынужденные колебания от кинематического возбуждения, что изменит пороговое значение v^* . Поскольку, как показано выше, критическая скорость v^* обычно малая величина, высокочастотную вибрацию нередко достаточно вводить в зону контакта только во время разгона и торможения, когда возникает опасность возникновения автоколебаний. Это позволит не только избежать нежелательных рывков и скачков ведомого звена 3, но и повысить точность ее позиционирования, которая будет иметь порядок размаха $2a$. высокочастотных колебаний. Отметим, что при этом целесообразно использовать колебания с низкими ультразвуковыми частотами порядка 20 кГц.

4. Как и выше, далее примем, что скорость скольжения по направляющим содержит высокочастотную составляющую $v = v_0 + a\omega \sin \omega t$, где a – амплитуда изменения скорости. При этом скорректированном значении скорости система описывается уравнением (1) в правой части которого теперь следует учесть силу инерции переносного движения. Как уже отмечалось, при этом происходит вибрационная линеаризация сил сухого трения. Однако в то же время могут также существенно измениться диссипативные параметры Ψ , ϑ . Как известно, эти параметры являются интегральными характеристиками нелинейных позиционных диссипативных сил, при определении которых мы располагаем ограниченной информацией, полученной для эталонных моделей при гармонических колебаниях. Поэтому, строго говоря, они отражают диссипативные свойства системы лишь при гармонических колебаниях и нуждаются в корректировке при более сложной структуре колебаний

(подробнее см. [3]). На рис.8 иллюстрируется динамический эффект от высокочастотного возбуждения.

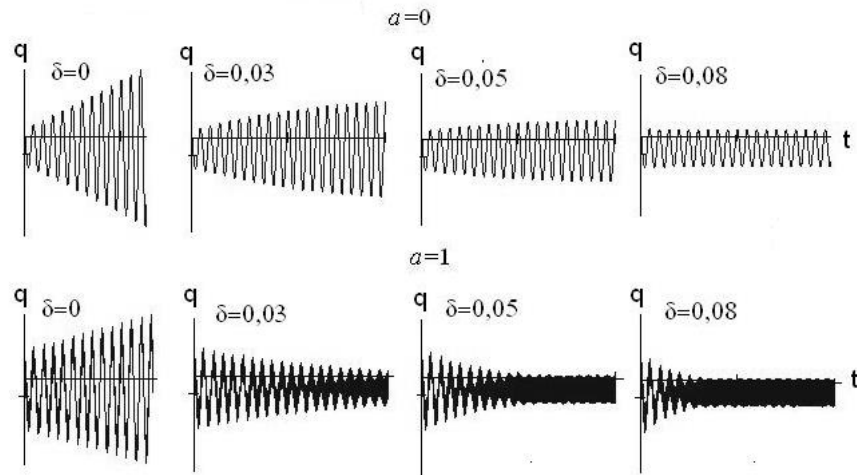


Рис.8

Графики получены компьютерным моделированием и построены в одном и том же масштабе при следующих значениях параметров: $\omega/k = 8$; $\zeta = 1,5$; $\nu = 1$; $a = 0$ (без высокочастотного возбуждения); $a = 1$ (при высокочастотном возбуждении).

Из анализа графиков следует, что без учета диссипации привода ($\delta = 0$) графики $q(t)$ в обоих случаях практически совпадают, что свидетельствует о неэффективности высокочастотного возбуждения. Этот вывод совпадает с ранее полученным результатом, согласно которому в данном случае пороговая скорость $v^* \rightarrow \infty$ (см. рис. 5). К аналогичному выводу мы приходим в случае повышенного уровня диссипации ($\delta = 0,08$). Таким образом, для фиксированного значения скорости переносного движения v выявляется зона эффективного влияния высокочастотного возбуждения, которая в нашем случае лежит в интервале $\delta \approx 0,03 \div 0,05$. По мере приближения к пороговому значению скорости этот интервал сужается, а при соблюдении условия (3) подавление фрикционных автоколебаний реализуется при $a = 0$.

При аналитическом расчете уточненные значения ψ , ϑ определяются как [3 - 5, 11]

$$\psi = \psi_0 \Phi_s, \quad \vartheta = \vartheta_0 \Phi_s. \quad (12)$$

Здесь ψ_0, ϑ_0 - параметры диссипации, определенные при моногармонических колебаниях; $\Phi_s = \Phi_s(z)$ - коэффициент, зависящий от отношения скоростей $z = v_0 / (a\omega)$ и формы петли гистерезиса.

Можно показать, что

$$\Phi_s = \frac{\int_0^{2\pi} \lambda_s \xi \cos \varphi d\varphi}{\int_0^{2\pi} \lambda_s |\cos \varphi| d\varphi}, \quad (13)$$

$$\text{где } \xi(\varphi, z) = \begin{cases} 2\pi^{-1} \arcsin(z \cos \varphi) & (|\cos \varphi| \leq z^{-1}), \\ \text{sign}(\cos \varphi) & (|\cos \varphi| \geq z^{-1}). \end{cases}$$

Параметр λ_s для прямоугольной петли гистерезиса равен единице, для эллиптической $|\cos \varphi|$, для треугольной (рессорная характеристика) $|\sin \varphi|$. Аналогичным образом корректируется и сила кулонова трения: $H_{z0} = H_0 \Phi_1(z)$, где индекс l отвечает прямоугольной петле гистерезиса.

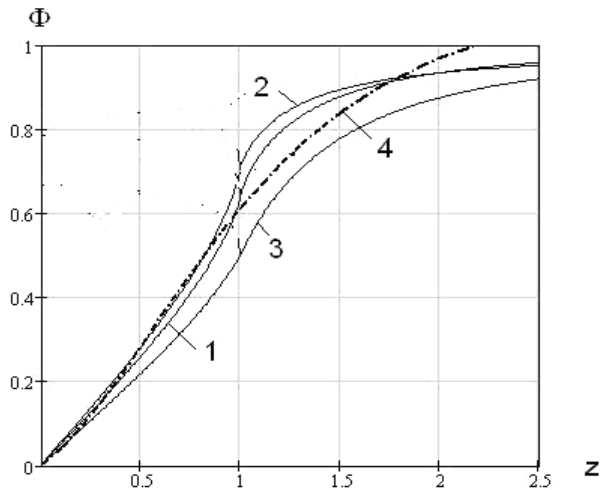


Рис.9

На рис.9 приведены графики $\Phi(z)$ для прямоугольной, эллиптической и треугольной петель гистерезиса (соответственно кривые 1,2,3). Функция $\Phi(z)$ при малых z , близка к линейной. В частности, для прямоугольной петли гистерезиса $\Phi = \Phi_1 \approx 0,5z$ (кривая 1), для эллиптической – $\Phi = \Phi_2 \approx 16z / (3\pi^2)$ (кривая 2), для треугольной – $\Phi = \Phi_3 \approx 3z / (2\pi)$ (кривая 3).

Результаты расчетов показывают, что, как и при моногармонических колебаниях, демпфирующие свойства системы в основном определяются площадью петли гистерезиса, пропорциональной коэффициенту рассеяния ψ . На основании анализа формулы (13) получена расчетная зависимость, аппроксимирующая с некоторым запасом усредненную характеристику для типовых петель гистерезиса.

$$\Phi = \Phi_0 = z(0,4 + 0,5z) / (1 + 0,5z^2). \quad (14)$$

Функции $\Phi_0(z)$ на графике отвечает кривая 4. В зоне $z \ll 1$ эффективные значения диссипативных коэффициентов существенно уменьшаются по сравнению с результатами, полученными при гармоническом режиме. Поэтому при $\omega \gg k$ высокочастотное возбуждение даже при очень малой амплитуде может привести к этому эффекту.

В рассматриваемой модели при этом одновременно корректируются перепад сил трения $h_s(\zeta - 1)\Phi(z)$ и коэффициент рассеяния $\psi_z = \psi\Phi(z)$, а формула (3) принимает следующий вид:

$$v^{**} = w\sqrt{\Phi(1 - \psi\Phi) / \psi}, \quad (15)$$

где v^{**} – критическая скорость при учете высокочастотной составляющей; $w = kh_1(\zeta - 1)$ – функция, пропорциональная перепаду сил трения.

Формула (15) свидетельствует о противоположных тенденциях при уменьшении Φ . Это связано с тем, что одновременно понижаются эффективные значения перепада сил трения и коэффициента рассеяния привода ψ_z . Первый из перечисленных факторов приводит к уменьшению v^{**} , а второй – к увеличению.

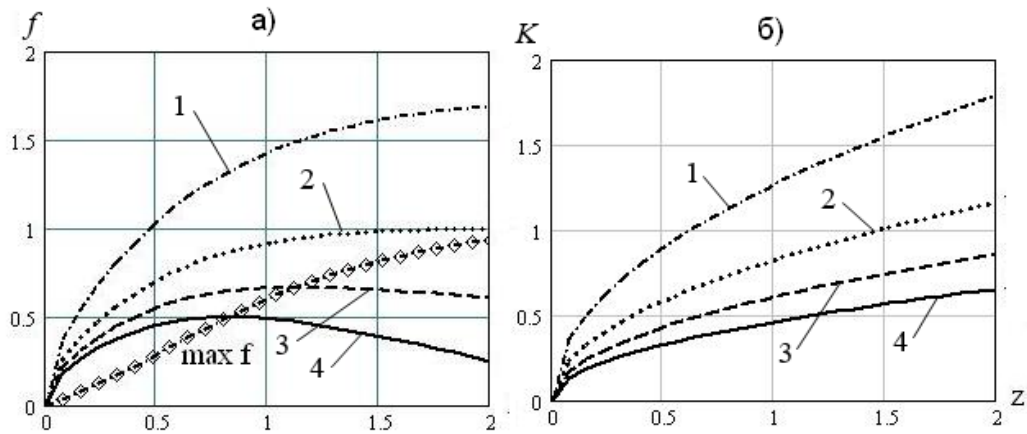


Рис. 10

На рис.10, а приведены графики $f(z, \psi) = v^{**} / w$; кроме того показано геометрическое место точек $\max f(z)$.

На основании формул (3), (14), (15) находим $v^{**} = v^* K(\Phi)$, где корректирующая функция $K(\Phi)$ имеет вид

$$K(\Phi) = \sqrt{\Phi(1 - \psi_0 \Phi) / (1 - \psi_0)}. \quad (16)$$

На рис.10,б приведено семейство кривых $K(z, \psi_0)$. Согласно (16) $\max K(\Phi)$ отвечает условию $\Phi = \Phi_* = 1 / (2\psi_0)$. Поскольку $\Phi < 1$, при $\psi_0 < 0,5$, функция $K(\Phi)$ на всем интервале $\Phi \in [0, 1]$ является возрастающей. При $\psi_0 > 0,5$ функция $K(\Phi)$ при $\Phi \in [0, \Phi_*]$ возрастает, а при $\Phi \in [\Phi_*, 1]$ – убывает.

Как показывает анализ, для снижения критической скорости возбуждения автоколебаний более чем в два раза при $\psi > 0,25$ необходимы величины $\Phi \leq 0,2$ при $z \leq 0,4$. Аналогичные динамические эффекты могут также возникать при высокочастотном воздействии в направлении, перпендикулярном плоскости движения.

5. Одним из способов устранения выявленных «скачков» помимо изложенных выше является использование материалов с малыми перепадами коэффициентов трения покоя и движения, таких, например, как наполненные фторопласты (тефлон, фторлон) в паре с закаленной сталью.

Разумеется, более радикальным способом является переход к приводам с шариковыми или роликовыми передачами, узлов с аэростатическими опорами и направляющими качения, в которых трение скольжения полностью исключается. Однако при этом нередко снижается приведенная жёсткость привода и низшая собственная частота, что обычно связано с устранением эффекта самоторможения, который в данном случае играет положительную

роль, сокращая «длину» кинематической цепи привода, подверженной возбуждаемым колебаниям.

Заметим также, что возникновение перепада сил трения согласно современным представлениям трактуется как результат воздействия широкополосных случайных возмущений, возникающих при скольжении шероховатых деформируемых тел, а сама сила трения, строго говоря, формируется в колебательной системе непосредственно происходящими в ней динамическими процессами. Поэтому использование в инженерных расчетах квазистатических характеристик трения носит в определенной степени оценочный характер.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-19-30026).

Список литературы

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.:Изд. иностр.лит.,1961. 777с.
2. Vulfson I. I., Vulfson M. N. Determining the effective characteristics of complex combination of elasto-dissipative machine drive elements // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2004. No 2. Pp. 1–6.
3. Вульфсон И.И.Динамика цикловых машин. СПб.: Политехника, 2013. 425 с.
4. Вульфсон И.И. Определение приведенных значений параметров диссипации при бигармонических колебаниях // Вибротехника. 1968. №4(9). С.33–41.
5. Dresig H., Vulfson J.I. Zur Dämpfungtheorie bei nichtharmonischer Belastung. Dämpfung und Nichtlinearität . Düsseldorf: VDI-Verlag, 1993. S. 141–156.
6. Красовский А. А. О вибрационном способе линеаризации нелинейных автоматических систем // Автоматика и телемеханика. Т. IX , вып. 1. 1948. С. 20–29.
7. Коловский М.З. О влиянии высокочастотных возмущений на резонансные колебания в нелинейной системе // Динамика и прочность машин. Труды ЛПИ. №226. М.,Л.: Машгиз. 1963. С.7–17.
8. Андронов В.В. О кажущемся превращении сухого трения в вязкое. - Инж. журн., МТТ, 1967, № 2. С. 91–92.
9. Андронов В.В. Вынужденные колебания в системе с преобразованным сухим трением. – Машиноведение, 1975, № 5.
10. Astashev V.K., Babitsky V.I.Ultrasonic Processes and Machines: dynamics, control and applications. Berlin: Springer. 2007. 330 p.
11. Вульфсон И.И. Учет нелинейных диссипативных сил при полигармонических колебаниях элементов машин // Вибротехника. 1981. №4(38).С. 63– 71.
12. Pohlman R., Lehfeltdt E. Influence of Ultrasonic Vibration on Metallic Friction // Ultrasonics. 1966. N 4. P. 178 – 185.
13. Архангельский М.Е. Уменьшение сухого динамического трения посредством ультразвуковых колебаний // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1969. № 2. С. 43 – 45.

Дата поступления статьи: 20 февраля 2017 года.