

УДК 534.11

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-ГАЛЕРКИНА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

© Владислав Львович Литвинов

СамГТУ, Самара, Россия

vladlitvinov@rambler.ru

Аннотация. Метод Канторовича – Галёркина распространён на более широкий класс задач о колебаниях механических систем с движущимися границами, учитывающих изгибную жесткость, сопротивление среды и жесткость основания. Особое внимание уделено анализу получаемых решений на резонансные свойства. Получены квадратурные формулы для амплитуд динамических мод различного порядка. В качестве примера рассмотрена задача о вынужденных колебаниях струны с равномерно движущейся границей. Произведена оценка погрешности метода Канторовича – Галёркина в зависимости от скорости движения границ.

Ключевые слова: колебания систем с движущимися границами, резонансные свойства, законы движения границ, изгибная жесткость, упругое основание, сопротивление среды, амплитуда колебаний.

APPLICATION OF METHOD KANTOROVICH-GALERKIN IN STUDYING RESONANCE PROPERTIES OF SYSTEMS WITH DAMPING

© Vladislav L. Litvinov

SSTU, Samara, Russia

vladlitvinov@rambler.ru

Abstract. Kantorovich - Galerkin method extended to a wider class of problems, taking into account the bending stiffness, environmental resistance and elastic base. Particular attention is paid to the analysis of the solutions obtained at the resonance properties. We obtain quadrature formulas for the amplitudes of the dynamic modes of different orders. As an example, consider the problem of forced vibrations of a string with a uniformly moving boundaries. The estimation error of Kantorovich - Galerkin method in depending on the speed of motion of the boundaries.

Key words: fluctuations in systems with moving boundaries, resonance properties, the laws of moving boundaries, the flexural rigidity, elastic base, environmental resistance, the amplitude of oscillation.

Точные методы решения краевых задач о колебаниях механических объектов с движущимися границами ограничены волновым уравнением [1, 4, 5]. Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича-Галеркина [2, 6]. В работах А.А. Лежневой [6] для решения задач о колебаниях систем с движущимися границами предлагается

использовать метод Канторовича в совокупности с методом Галеркина. Такой подход очень удобен, так как начальная задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Этот метод А.А. Лежнева применяется для получения решений волнового уравнения и уравнения изгибных колебаний балки при несложных однородных граничных условиях, заданных на одной движущейся и одной неподвижной границах.

В данной работе метод распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость колеблющегося объекта [3, 10], сопротивление внешней среды [7, 10–12] и жесткость подложки [3, 11, 12]. Особое внимание уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на границах.

Пусть требуется получить решение дифференциального уравнения в частных производных:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 U(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau) \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$Y_{ji}[U(|_j(\varepsilon\tau), \tau)] = F_{ji}(\tau); \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, 2}, \quad (2)$$

где $U(\xi, \tau)$ — функция смещения, L — линейный однородный дифференциальный оператор по ξ порядка $2m$ ($m \leq 2$ — целое положительное число); Y_{ji} — линейные однородные дифференциальные операторы по ξ ; $\varphi(\xi, \tau)$, $F_{ji}(\tau)$ — заданные функции класса C и C^2 соответственно; $\varepsilon_1, \varepsilon$ — малые параметры ($\varepsilon = V/a$, V — скорость границы, a — скорость распространения колебаний).

Запись законов движения границ в виде $|_j(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения. Уравнение (1) и граничные условия (2) самосопряженные и в случае неподвижности границ ($|_j(\varepsilon\tau) = const$) может быть получено точное решение методом разделения переменных.

Заметим, что метод Канторовича-Галеркина позволяет учесть и начальные условия. При анализе резонансных свойств начальные условия принимаются в виде

$$U(\xi, 0) = U_{\tau}(\xi, 0) = 0.$$

Для того, чтобы избавиться от неоднородностей в граничных условиях, вводится новая функция

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (3)$$

где

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) F_{kr}(\tau),$$

а функция $D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяют уравнению

$$L[D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)] = 0 \quad (4)$$

и условиям

$$Y_{ji}[D_{kr}(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] = \begin{cases} 1, k = j \wedge r = i; \\ 0, k \neq j \vee r \neq i. \end{cases} \quad (5)$$

Решение задачи (4), (5) затруднений, как правило, не вызывает, и поэтому здесь она подробно не рассматривается.

Функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 V(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau) - H_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 H(\xi, \tau), \quad (6)$$

$$Y_{ji}[V(l_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \quad (7)$$

Для решения задачи используем метод Канторовича в совокупности с методом Галеркина. Решение задачи будем искать в виде:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (8)$$

где $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ - собственные функции следующей краевой задачи

$$L[X_n(\xi, \varepsilon\tau)] = \omega_n^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau); \quad (9)$$

$$Y_{ji}[X_n(l_j(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)] = 0. \quad (10)$$

Здесь $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи. Оператор L не содержит производной по τ , поэтому $\varepsilon\tau$ – рассматривается как параметр.

Такой выбор координатных функций X_n обуславливает тот факт, что решение (8) является точным в случае, если границы неподвижны. В реальных технических объектах при продольных колебаниях ε не превосходит 0,05, а при поперечных колебаниях ε не превосходит 0,1.

Заметим, что функции $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (7) и играют в данном случае роль динамических, т.е. изменяющихся со временем, мод.

Разложим функции $H(\xi, \tau)$ в ряд Фурье:

$$H(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (11)$$

где

$$\varphi_n(\tau) = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} H(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi / \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi; \quad (12)$$

здесь $q(\xi)$ – весовая функция.

Тогда, согласно методу Галеркина, с учетом (9), (11), функции $f_n(\tau)$ будут удовлетворять следующей системе:

$$\int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \{ [f_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} + \omega_n^2(\varepsilon\tau)f_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon_1 f_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) +$$

$$+ [\varphi_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} + \varepsilon_1 \varphi_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) \} X_m(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d(\xi) = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi, \tau) X_m(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d(\xi), \quad (13)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Решение системы (13) затруднительно. При резонансных явлениях, амплитуды всех динамических мод, за исключением резонансной, малы. Поэтому, в каждом уравнении системы, членами, не содержащими $X_m(\xi, \varepsilon\tau)$ в связи с их малостью, пренебрегают. В этом случае система (13) становится расщепленной и уравнение для нахождения $f_n(\tau)$ принимает вид:

$$\int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \{ [f_n(\tau) + \varphi_n(\tau)] X_n(\xi, \varepsilon\tau) \}_{\tau\tau} + \Omega_n^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon_1 \varphi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) \} \times$$

$$\times X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi, \quad (14)$$

где $\Omega_n^2(\varepsilon\tau) = \omega_n^2(\varepsilon\tau) + \varepsilon_1$.

Введем новую функцию: $\mu_n(\tau) = f_n(\tau) + \varphi_n(\tau)$, тогда уравнение (14) примет вид:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) \mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) \mu_n'(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) \mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau) \Omega_n^2(\varepsilon\tau) \mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (15)$$

где $A_{1n}(\varepsilon\tau) = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi$; $\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_{n,\tau}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi$;

$$\varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) = \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} X_{n,\tau\tau}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi$$

$$\theta_n(\tau) = \omega_n^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) \varphi_n(\tau) + \int_{l_1(\varepsilon\tau)}^{l_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi. \quad (16)$$

С учетом (8), (11) решение (3) будет иметь вид:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau).$$

Данное решение показывает, что аналогично тому, как колебательные процессы для объектов с неподвижными границами выражаются суммой колебаний, соответствующих собственным функциям, так в случае движения границ появляется суперпозиция колебаний, соответствующих динамическим модам $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$.

В большинстве практических задач границы движутся в медленном режиме и параметр ε мал, поэтому в дальнейшем величины порядка ε^2 учитываться не будут [1, 2].

Для упрощения введем в уравнение (15) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau), \quad (17)$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp\left[-\int_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\zeta)}{A_{1n}(\varepsilon\zeta)} d\zeta\right]. \quad (18)$$

В этом случае уравнение (15) с точностью до величин порядка ε^2 будет иметь вид:

$$y_n''(\tau) + \Omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = \theta_n(\tau) / [A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)]. \quad (19)$$

Пусть внешнее воздействие на систему носит гармонический характер, т.е.

$$\varphi(\xi, \tau) = B_0(\xi) \cos W_0(\tau); \quad (20)$$

$$F_{ji}(\tau) = B_{ji} \cos W_{ji}(\tau); \quad j = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, m}, \quad (21)$$

где $B_0(\xi)$ – функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки; $W_0(\tau)$, $W_{ji}(\tau)$ – монотонно возрастающие функции; B_{ji} – постоянные величины.

Ограничимся рассмотрением случая, когда правую часть уравнения (19) можно представить в виде:

$$\theta_n(\tau) / [A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)] = M_n(\varepsilon\tau) \cos W_n(\tau), \quad (22)$$

где $W_n(\tau)$ – монотонно возрастающая функция.

Представление (22) возможно в следующих случаях:

- 1) все внешние возмущения $\varphi(\xi, \tau); F_{ji}(\tau)$ равны нулю кроме какого-то одного;
- 2) производные функций $W_0(\tau), W_{ji}(\tau)$ равны между собой, т.е. сами функции отличаются на постоянную величину;
- 3) резонансные области внешних нагрузок φ, F_{ji} не пересекаются, тогда при рассмотрении резонанса от одной нагрузки действием других можно пренебречь.

С учетом изложенного, уравнение (19) примет вид:

$$y_n''(\tau) + \Omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau) \cos W_n(\tau). \quad (23)$$

Решение данного уравнения при начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ записывается следующим образом [1]:

$$y_n(\tau) = \int_0^\tau \gamma_n(\tau, \zeta) M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) d\zeta, \quad (24)$$

где

$$\gamma_n(\tau, \zeta) = \frac{y_{1n}(\tau)y_{2n}(\zeta) - y_{1n}(\zeta)y_{2n}(\tau)}{y_{1n}(\zeta)y'_{2n}(\zeta) - y'_{1n}(\zeta)y_{2n}(\zeta)}, \quad (25)$$

а y_{1n}, y_{2n} – линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (23).

С помощью метода малого параметра [13] с точностью до величин порядка ε^2 найдем:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau); \quad (26)$$

$$y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau), \quad (27)$$

где функции $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$ определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \Omega_n(\varepsilon\tau); \\ \frac{da_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = -\frac{a_n(\varepsilon\tau)}{2\Omega_n(\varepsilon\tau)} \cdot \frac{d\Omega_n(\varepsilon\tau)}{d\tau}. \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_n(\varepsilon\tau) d\tau; \quad a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_n(\varepsilon\tau)}}.$$

Возвращаясь к решению (24), (25), с учетом (26), (27), получим:

$$\begin{aligned} y_n(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau) \int_0^\tau \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \cos w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w'_n(\zeta)} d\zeta - \\ - a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau) \int_0^\tau \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \sin w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w'_n(\zeta)} d\zeta. \end{aligned}$$

Разлагая произведение тригонометрических функций в сумму и учитывая замену (17), можно получить следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующих n -ой динамической моде:

$$\begin{aligned} A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \{ [\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta]^2 + \\ + [\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta]^2 \}, \end{aligned}$$

где $F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w'_n(\zeta)}$; $\Phi_{n1}(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta)$; $\Phi_{n2}(\zeta) = w_n(\zeta) + W_n(\zeta)$.

Здесь функция $F_n(\varepsilon\zeta)$ знакопостоянна, так как функции $M_n(\varepsilon\zeta)$ положительны, а произведение $a_n(\varepsilon\zeta) w'_n(\zeta)$ знакопостоянно (оно равно якобиану двух линейно независимых функций y_{1n} и y_{2n}). Функции $w_n(\zeta)$ и $W_n(\zeta)$ монотонно возрастают, поэтому фаза $\Phi_{n2}(\zeta)$ изменяется быстрее фазы свободных колебаний, которая определяется функцией $w_n(\zeta)$. Следовательно, участок знакопостоянства функций $\sin \Phi_{n2}(\zeta)$, $\cos \Phi_{n2}(\zeta)$ меньше половины периода свободных колебаний, т. е. период возрастания соответствующих интегралов

невелик. Интегралы же, содержащие $\sin \Phi_{n1}(\zeta)$, $\cos \Phi_{n1}(\zeta)$, возрастают в течение всего периода, пока наблюдается резонансное явление, и вносят основной вклад в амплитуду. Пренебрегая членами, содержащими $\Phi_{n2}(\zeta)$, получим следующее выражение для амплитуды колебаний:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (28)$$

Полученное выражение удобно для анализа резонансных свойств систем с движущимися границами. В таких системах различают два вида резонансных явлений: установившийся резонанс и прохождение через резонанс.

Установившийся резонанс - это явление резкого увеличения амплитуды колебаний в случае, когда изменение частоты внешней силы и одной из собственных частот согласованы таким образом, что создаются наилучшие условия для возрастания амплитуды.

Прохождение через резонанс – это явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты.

Заметим, что при стремлении скорости движения границ к нулю, явление установившегося резонанса и явление прохождения через резонанс вырождаются в явления обычного резонанса для системы с неподвижными границами.

Из выражения (28) следует, что установившийся резонанс будет наблюдаться, если $\Phi_{n1}(\zeta) = \gamma = const$.

Явление прохождения через резонанс наблюдается во временной области, содержащей точку τ_0 , где $\Phi'_{n1}(\tau_0) = 0$. В этой точке мгновенная частота n -го собственного колебания проходит через значение возмущающей частоты. Прохождение через резонанс начинается, не доходя до точки τ_0 и заканчивается за этой точкой. Если принять амплитуду в начале резонансной области (точка τ_1) равной амплитуде внешнего воздействия, то амплитуда в конце резонансной области (точка τ_2) будет определяться следующим выражением:

$$A_n^2(\tau_1; \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (29)$$

Исследование прохождения через резонанс заключается в определении границ резонансной области τ_1 и τ_2 , соответствующих максимуму выражения (29), причем $\tau_1 < \tau_0$, а $\tau_2 > \tau_0$.

В качестве примера рассмотрим вынужденные колебания струны с равномерно движущейся границей. Зависимость силы сопротивления движению струны примем пропорционально ее скорости. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее колебания струны, будет иметь вид:

$$\rho Z_{tt}(x, t) - TZ_{xx}(x, t) + \lambda Z_t(x, t) = 0, \quad (30)$$

где ρ - линейная плотность массы струны; T - сила натяжения струны; λ - сила сопротивления среды, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения; $Z(x, t)$ - поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t .

Рассмотрим граничное условие следующего вида:

$$Z(0, t) = 0; \quad Z(l_0(t), t) = B \cos W_0(\omega_0 t). \quad (31)$$

Здесь $l_0(t) = L_0 + v_0 t$ - закон движения границы; $W_0(\omega_0 t)$ - монотонно возрастающая функция; B, ω_0 - постоянные величины (в случае действия гармонического возмущения ω_0 является частотой возмущения).

Введем в задачу (30), (31) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 x / a; \quad \tau = \omega_0 t + (\omega_0 L_0 - a) / v_0; \quad Z(x, t) = Bz(\xi, \tau)$$

и новую функцию $z(\xi, \tau) = e^{-\alpha \tau} U(\xi, \tau)$, где $a = \sqrt{T / \rho}$; $\alpha = \lambda / (2\omega_0 \rho)$.

Тогда после преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \alpha^2 U(\xi, \tau) = 0; \quad (32)$$

$$U(0, \tau) = 0; \quad U(l(\varepsilon, \tau), \tau) = e^{\alpha \tau} \cos W(\tau). \quad (33)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$l(\varepsilon, \tau) = 1 + \varepsilon \tau; \quad \varepsilon = V_0 / a; \quad W(\tau) = W_0(\tau + \gamma_0); \quad \gamma_0 = (a - \omega_0 L_0) / v_0.$$

Заметим, что величина $\exp(-2\pi\alpha)$ характеризует относительное изменение амплитуды свободных колебаний за одно собственное колебание, и α в большинстве случаев является величиной того же порядка малости, что и ε .

Для решения задачи используем описанную выше методику.

В результате получим следующее выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ой динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (34)$$

где

$$\omega_n(\varepsilon \tau) = \pi^2 n^2 / l(\varepsilon \tau) - \alpha^2; \quad w_n(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \left[S(\varepsilon \tau) - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + S(\varepsilon \tau)}{1 - S(\varepsilon \tau)} \right];$$

$$S(\varepsilon \tau) = \sqrt{1 - \alpha^2 (1 + \varepsilon \tau)^2 / (\pi^2 n^2)}; \quad E_n^2(\tau) = \frac{e^{-2\alpha \tau}}{4l(\varepsilon \tau)\omega_n(\varepsilon \tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta);$$

$$F_n(\zeta) = -2\pi n (-1)^n e^{\alpha \zeta} / \sqrt{\omega_n(\varepsilon \zeta) l^3(\varepsilon \zeta)}.$$

Установившийся резонанс в рассматриваемой системе наблюдается, если $W(\zeta) = w_n(\zeta) + \gamma$, где γ - постоянная величина. Амплитуда при этом имеет вид:

$$A_n(\tau) = e^{-\alpha \tau} \int_0^\tau \frac{e^{\alpha \zeta}}{1 + \varepsilon \zeta} d\zeta.$$

Численное исследование этого выражения показывает, что при уменьшении длины струны ($\varepsilon < 0$), амплитуда колебаний непрерывно возрастает. При увеличении длины ($\varepsilon > 0$), амплитуда сначала возрастает, достигая некоторого максимального значения, а потом начинает убывать. Убывание амплитуды связано с тем, что демпфирующие силы, начиная с некоторого момента времени, начинают преобладать над возмущающими, так как длина колеблющейся части увеличивается.

Зависимость максимальной амплитуды от α и ε (от номера n она не зависит) приведена в таблице.

Таблица зависимости максимальной амплитуды от α и ε

| $\alpha \backslash \varepsilon$ | 0,001 | 0,005 | 0,010 | 0,100 | 0,200 |
|---------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,00 | 1000 | 201 | 101 | 10,1 | 5,1 |
| 0,05 | 51,3 | 27,1 | 20,1 | 5,4 | 3,3 |
| 0,10 | 31,5 | 17,3 | 13,4 | 4,2 | 2,7 |

Исследуем явление прохождения через резонанс, возникающее в струне под действием силы постоянной частоты, т.е. $W(\tau) = \tau$, что в исходной системе соответствует действию силы с частотой ω_0 .

Максимально возможная амплитуда колебаний совпадает с максимумом выражения:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}.$$

Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки τ_0 ($\tau_1 < \tau_0$) и заканчивается за этой точкой ($\tau_2 > \tau_0$). Сама точка τ_0 определяется по формуле

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\pi n}{\sqrt{1 + \alpha^2}} - 1 \right).$$

В результате исследования прохождения через резонанс, получена зависимость максимальной амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс на первой динамической моде, от α и ε . Данная зависимость приведена на рисунке.

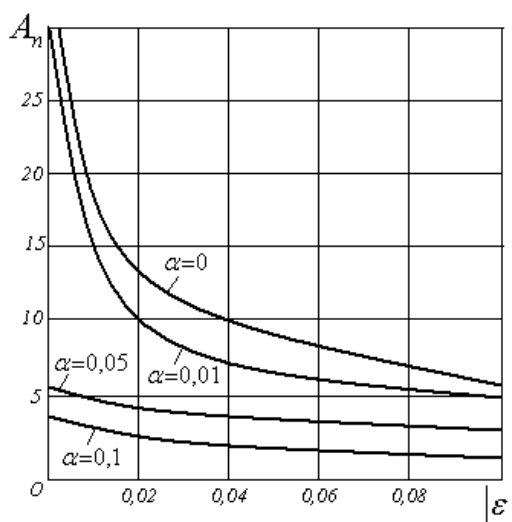


Рис. Зависимость амплитуды колебаний струны от α и ε при прохождении через резонанс на первой динамической моде.

Анализ графика показывает, что амплитуда при $\alpha = 0$ является оценкой сверху для амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс, когда $\alpha > 0$. Когда действие демпфирующих сил не учитывается ($\alpha = 0$) задача (32), (33) может быть решена точным методом [5]. Это сделано в работе [1]. Сравнение результатов показывает, что метод

Канторовича-Галёркина даёт в рассматриваемом случае ($\varepsilon < 0,37$) удовлетворительные по точности результаты (погрешность лежит в пределах 5%).

Список литературы

1. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография // – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2009. – 131 с.
2. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.* Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №1(18). – 2009. – С. 149–158.
3. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». № 1 (37) – 2013. – С. 93–98.
4. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
5. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 3 (28) – 2012. – С. 145–151.
6. *Лежнева А.А.* Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159-161.
7. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л.* Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №2 (19). – 2009. – С. 147–152.
8. *Литвинов В.Л.* Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце// Вестник научно–технического развития. № 1 (101), 2016. – С. 19–24.
9. *Горошко О. А., Савин Г. Н.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
10. *Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.* Резонансные свойства каната переменной длины, обладающего изгибной жесткостью с учетом действия демпфирующих сил // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2011. – С. 15–20.
11. *Литвинов В.Л.* Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. № 4 (92), 2015. – С. 29–33.
12. *Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.* Исследование резонансных свойств струны переменной длины, лежащей на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно–технического развития. № 11 (99), 2015. – С. 38–43.
13. *Литвинов В.Л.* Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 16, № 1. 2014. – С. 83–88